Chapitre 1 : Proportionnalité 1

1. Grandeurs proportionnelles

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre.

Ce nombre est appelé un coefficient de proportionnalité.

Exemples et contre exemples :

Activités mentales 36.1, 37.1, 37.2.

2. Propriété de linéarité

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Soient *a, b, c,d* et *l* cinq nombres positifs.

On considère le tableau de proportionnalité suivant de coefficient *k*.

Grandeur 1	a	b
Grandeur 2	c	d

Si $b = a \times l$ alors $d = c \times l$

Exemple

Compléter le tableau suivant de telle sorte que ce soit un tableau de proportionnalité

Grandeur 1	4	8	2	6	10	14
Grandeur 2	7					

On admet la propriété suivante :

<u>Propriété :</u>

Soient *a, b, c, d, e et f* cinq nombres positifs.

On considère le tableau de proportionnalité suivant de coefficient *k*.

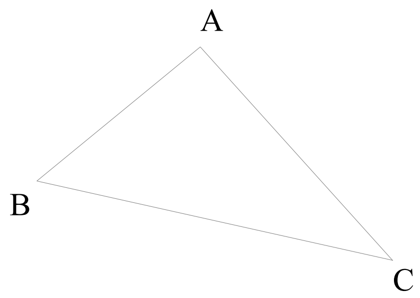
Grandeur 1	a	b	c
Grandeur 2	d	e	f

Si $c = a + b$ alors $f = d + e$

Chapitre 2 : Triangles 1

1. Inégalités triangulaires

1.1 Théorème



Toutes les propriétés de ce paragraphe sont admises :

Théorèmes :

1. **Si ABC est un triangle alors :** $AB \leqslant AC + CB$, $AC \leqslant AB + BC$, $BC \leqslant BA + AC$

Autrement dit : dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

2. **Soient trois nombres positifs : *a, b* et *c*.**

Si on a : $a \leqslant b + c$, $b \leqslant a + c$, $c \leqslant a + b$ **alors il existe un triangle dont les côtés mesurent *a, b* et *c* (dans la même unité).**

Exemples

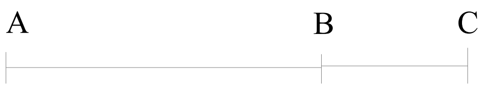
Dans chacun des cas suivants, justifier si il est possible ou non de construire un triangle de dimensions *a, b* et *c*. *(Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité).*

- Cas 1 : $a = 8$; $b = 6$ et $c = 7$.
- Cas 2 : $a = 37$; $b = 84$ et $c = 12$.

Remarque :

Il suffit de vérifier le plus grand nombre est inférieur à la somme des deux autres pour que le triangle existe.

1.2 Points alignés



On admet la propriété suivante :

Propriété :

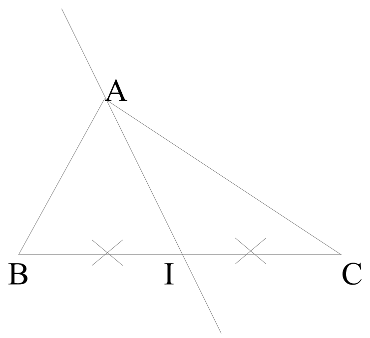
Soient A, B et C trois points.

- **Si B appartient au segment [AC] alors AC = AB + BC**
- **Réciproquement si AC = AB + BC alors B appartient au segment [AC].**

Exemple

Que peut-on dire des points A, B et C tel que AB = 12 cm, BC = 46 cm et AC = 34 cm ? Justifier la réponse.

2. Médianes d'un triangle



Données :

- ABC est un triangle.
- I est le milieu de [BC].

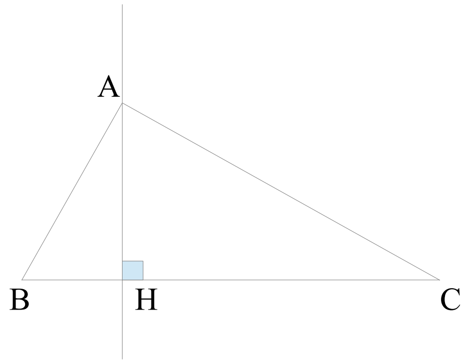
Définition :

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par le milieu d'un côté et par le sommet opposé à ce côté.

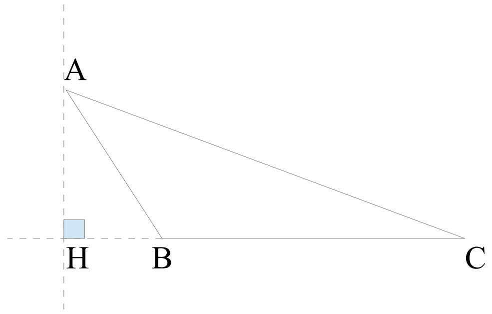
Exemple : la droite (AI) est la médiane issue de B dans let triangle ABC.

Remarque : Dans un triangle, il y a trois médianes.

3. Hauteur d’un triangle



Cas 1



Cas 2

Données :

- ABC est un triangle.
- La droite perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (BC) en H.

Définition

On appelle hauteur issue d’un sommet dans un triangle, la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au support du côté opposé à ce sommet.

Exemple : Pour les triangles ci-dessus, la droite (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

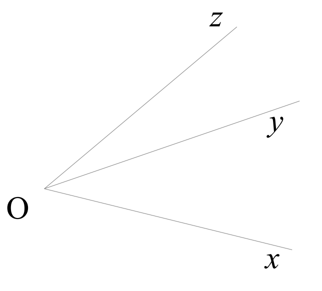
Remarque : Dans un triangle, il y a trois hauteurs.

Vocabulaires :

- Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
- La longueur AH est aussi appelée hauteur du triangle ABC.

4. Angles

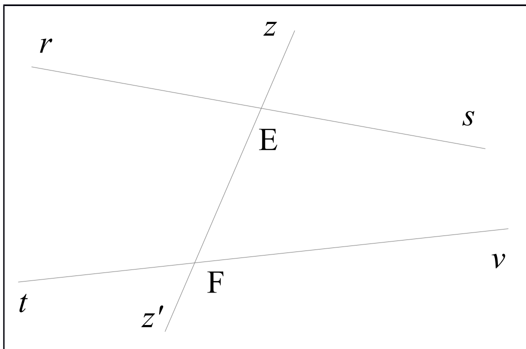
4.1 Angles adjacents

	**Données:** Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux angles de sommet O.

Les angles et ont leur sommet en commun, un côté en commun : [O***y***)
et les deuxièmes côtés de : ([O***x***)) et de ([O***z***)) sont situés de part et d'autre de [O***y***).

On dit de ces deux angles qu'ils sont **adjacents**.

4.2 Angles alternes internes et angles correspondants.

	**Données :** Les droites (***rs***) et (***tv***) coupent la droite (***zz'***) respectivement en E et F.

- Les angles $\widehat{rEz'}$ et $\widehat{zFv}$ sont situés de part et d'autre de la droite (***zz'***) et ils sont « entre » les droites (***rs***) et (***tv***).
  On dit de ces deux angles qu'ils sont **en position d'angles alternes internes par rapport à la droite (*zz'*) sécante aux droites (*rs*) et (*tv*).**

- Les angles $\widehat{rEz'}$ et $\widehat{tFz'}$ sont situés du même côté de la droite (***zz'***) et l'un est entre les droites (***rs***) et (***tv***) l'autre non.
  On dit de ces deux angles qu'ils sont **en position d'angles correspondants par rapport à la droite (zz'), sécante aux droites (*rs*) et (*tv*).**

4.3 Angles complémentaires et angles supplémentaires.

Définitions :

- **Deux angles sont complémentaires signifie que la somme de leur mesure en degré est égale à 90.**
- **Deux angles sont supplémentaires signifie que la somme de leur mesure en degré est égale à 180.**

Chapitre 3 : Enchaînements d'opérations

1. Enchaînements de calculs sans parenthèse

Définition :

Pour calculer une expression sans parenthèse, on respecte les priorités de calculs suivantes :

1. **Si l'expression ne comporte que des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite.**
2. **Si l'expression ne comporte que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite.**
3. **Dans les autres cas, on commence par calculer les produits et les quotients puis on calcule les sommes et les différences.**

Exemples : $A = 72 - 24 + 18$ $B = 9 + 6 \times 8$ $C = 36 - 12 \times 3$

2. Enchaînements de calculs avec parenthèses

Définition 2 :

Pour calculer une expression avec parenthèses, on commence par effectuer les calculs entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures et en respectant les priorités de calcul énoncées dans la définition 1.

Exemples : $D = 57 - (32 - 17)$ $E = 7 \times (5 + 9)$ $F = (5 \times 6 + 4) \times 3$

3. Nommer un calcul

- Pour B, la dernière opération effectuée est l'addition, B est une somme.
  Plus précisément, B est la somme de 9 et du produit de 6 par 8.

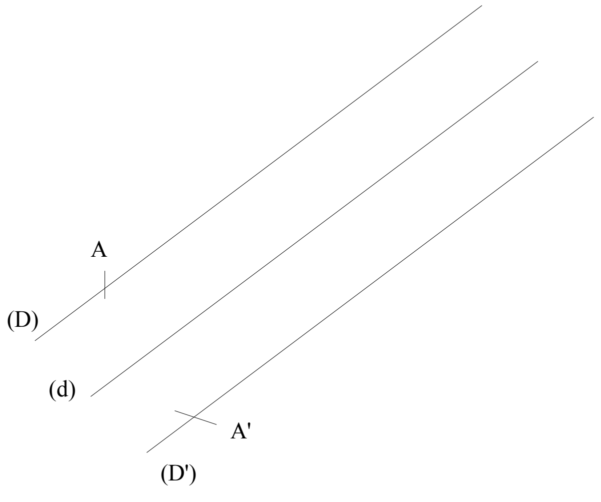
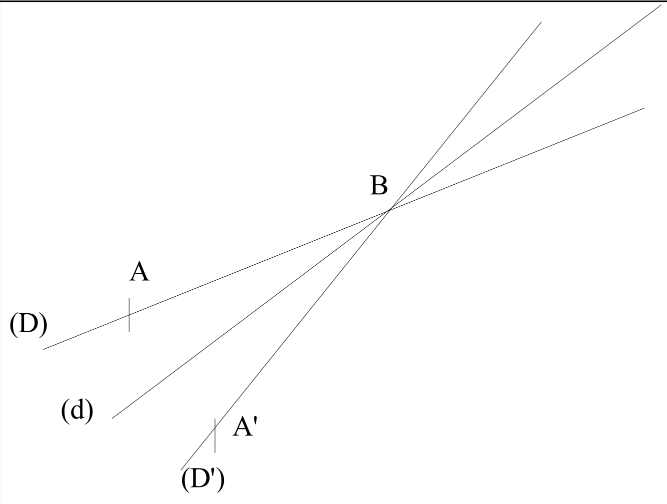
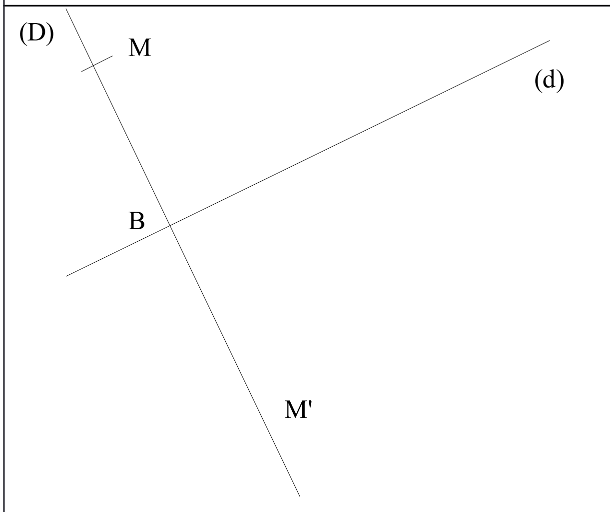
- Pour C, la dernière opération effectuée est la soustraction, C est une différence.
  Plus précisément, C est la différence de 36 et du quotient de 12 par 3.
- D est la différence de 57 et de la différence de 32 et de 17.

- E est le produit de 7 par la somme de 5 et de 9.

Chapitre 4 : Symétrie axiale. Médiatrice d'un segment. Cercle circonscrit à un triangle

1. Symétrique d'une droite par rapport à une droite.

(D) et *(d)* sont deux droites, A est un point de (D) et A’ est le symétrique de A par rapport à *(d)*

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Cas 1 : Les droites (D) et (d) sont parallèles</td><td>Cas 2 : Les droites (d) et (D) sont sécantes en B sans être perpendiculaires</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Cas 3 : Les droites (d) et (D) sont perpendiculaires</td></tr>
</table>

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Soient (D) et *(d)* sont deux droites, A est un point de (D) et A’ est le symétrique de A par rapport à *(d)*.

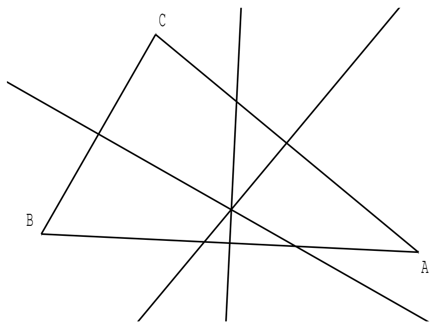
1. **Si les droites (D) et *(d)* sont parallèles alors la symétrie d’axe *(d)* transforme la droite (D) en une droite passant par A’ et parallèle à la droite (D).**

2. **Si les droites (D) et *(d)* sont sécantes en B alors la symétrie d'axe *(d)* transforme la droite (D) en une droite passant par le point B.**
3. **Si les droites (D) et *(d)* sont perpendiculaires, alors la droite (D) est invariante par la symétrie d'axe *(d)*.**

2. Médiatrice d'un segment

3. Cercle circonscrit à un triangle

3.1 Conjecture



Hypothèses :

- ABC est un triangle.
- *(d)* est la médiatrice de [BC]
- *(d')* est la médiatrice de [AC].
- *(d'')* est la médiatrice de [AB].

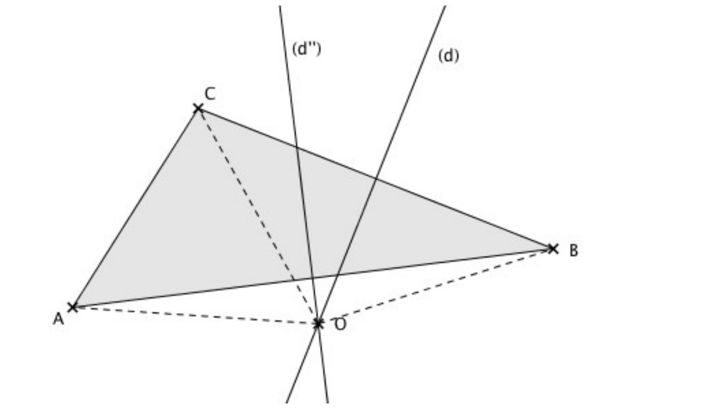
Conjecture :

Il semble que dans un triangle, les trois médiatrices soient concourantes

3.2 Démonstration

Idée de la démonstration :

Pour démontrer que les trois médiatrices sont concourantes en un point, il est nécessaire et suffisant de montrer qu'un point appartient aux trois médiatrices.



Hypothèses :

- ABC est un triangle.
- *(d)* est la médiatrice de [BC]
- *(d'')* est la médiatrice de [AB].

On admet que *(d)* et *(d'')* sont sécantes en un point O.
Il nous suffit maintenant de démontrer que le point O appartient à la médiatrice du segment [AC].

Etape 1 : On démontre que OB = OC.
On sait que : O appartient à la médiatrice de [BC] par hypothèse.
Théorème : Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités du segment.
Conclusion : OB = OC.

De la même façon, puisque O appartient à la médiatrice de [AB], on a : OA = OB.

Etape 2 : On démontre que O est équidistant de A et de C.
On a : OA = OB et OB = OC d'après l'étape 1.
On en déduit que : OA = OC.

Etape 3 : On démontre que O appartient à la médiatrice de [AC].
On sait que : OA = OC (Etape 2).
Théorème : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment.
Conclusion : O appartient à la médiatrice de [AC].

3.3 Théorèmes et définition.

On vient de démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème :</u>

Les médiatrices d'un triangle sont <u>concourantes</u>.
Le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

<u>Définition :</u> Un cercle circonscrit à un triangle est un cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

On admet la propriété suivante :

<u>Propriété :</u> Un triangle a un unique cercle circonscrit.

On en déduit le théorème suivant :

<u>Théorème</u>

Les médiatrices d'un triangle sont <u>concourantes</u>.
Le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit du triangle.

<u>Remarque :</u> En vertu de ce théorème, il est donc suffisant de dessiner deux médiatrices du triangle pour en tracer le cercle circonscrit.

Chapitre 5 : Nombres relatifs 1

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Pour tout nombre positif *a*, l'équation d'inconnue *x* : $x + a = 0$ admet une unique solution.

On a alors la définition suivante :

Définition :

Pour tout nombre positif *a*, on note *-a* la solution de l'équation d'inconnue *x* : $x + a = 0$

Exemple

-3 est le nombre tel que $-3 + 3 = 0$

Définitions :

Pour tout nombre positif *a*,

- ***-a* est un nombre négatif.**
- ***a* est la valeur absolue de *a* et de *-a*.**

Définition :

Deux nombres sont opposés l'un de l'autre si leur somme est nulle.

Remarque :

- Pour tout nombre *a*, *a* et *-a* sont opposés l'un de l'autre.

Chapitre 6 : Proportionnalité 2 :
« Règle de trois ». Pourcentage.

1. Règle de trois

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Soient *a, b, c et d* quatre nombres positifs avec *a* non nul.

Grandeur 1	***a***	***b***
Grandeur 2	***c***	***d***

Si le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité alors *d* =

$$d=\frac{c}{a}\times b=\frac{c\times b}{a}$$

2. Synthèse des différentes méthodes pour compléter un tableau de proportionnalité

Pour déterminer une quatrième proportionnelle, on peut utiliser :

- les propriétés de linéarité.
- le coefficient de proportionnalité (après l'avoir déterminé).
- « la règle de trois ».

3. Proportion. Pourcentage

Exercice

Un gâteau au chocolat de 300 g contient 20 g de beurre et un autre à la framboise qui pèse 400 g contient 100 g de beurre. Quel est celui des deux gâteaux qui est le plus riche en beurre ?

Méthode 1

300 : 75 = 4

Donc le beurre représente $\frac{1}{4}$ du gâteau au chocolat

400 : 100 = 4

Donc le beurre représente $\frac{1}{4}$ du gâteau à la framboise

Conclusion : Les deux gâteaux sont aussi riches en beurre l'un que l'autre.

Méthode 2

Les deux tableaux ci-dessous sont des tableaux de proportionnalité

- **Gâteau au chocolat**

Masse de beurre	75	75 : 3 = 25
Masse de gâteau	300	100

Dans le gâteau au chocolat, la proportion de beurre est de 25 over 100 soit 25 %.

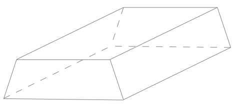
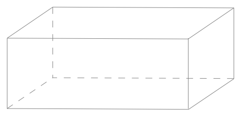
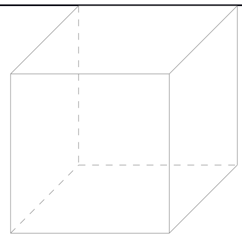
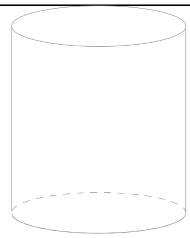
- **Gâteau à la framboise**

Masse de beurre	100	100 : 4 = 25
Masse de gâteau	400	100

Dans le gâteau à la framboise, la proportion de beurre est de 25 over 100 soit 25 %.

Chapitre 7 : Prisme droit.

1. Prisme droit

			
Solide 1	Solide 2	Solide 3	Solide 4

Exemples :

Solides	Nature	Nature de la base	Nombre d'arêtes	Nombre de faces
1				
2				
3				
4				

Définition :

Un prisme droit est un solide tel que :

1. Deux de ses faces sont des polygones superposables et parallèles.
Ces deux faces sont appelées les bases du prisme droit.

2. Toutes ses autres faces sont des rectangles.

Remarques :

- Si dans le point 2 de la définition, on substitue parallélogramme à rectangle, le solide ainsi défini est un prisme.
- Le pavé droit est un prisme droit à base rectangulaire et le cube est un prisme droit à base carré.
  Le pavé droit et le cube sont donc des cas particuliers de prisme droit.

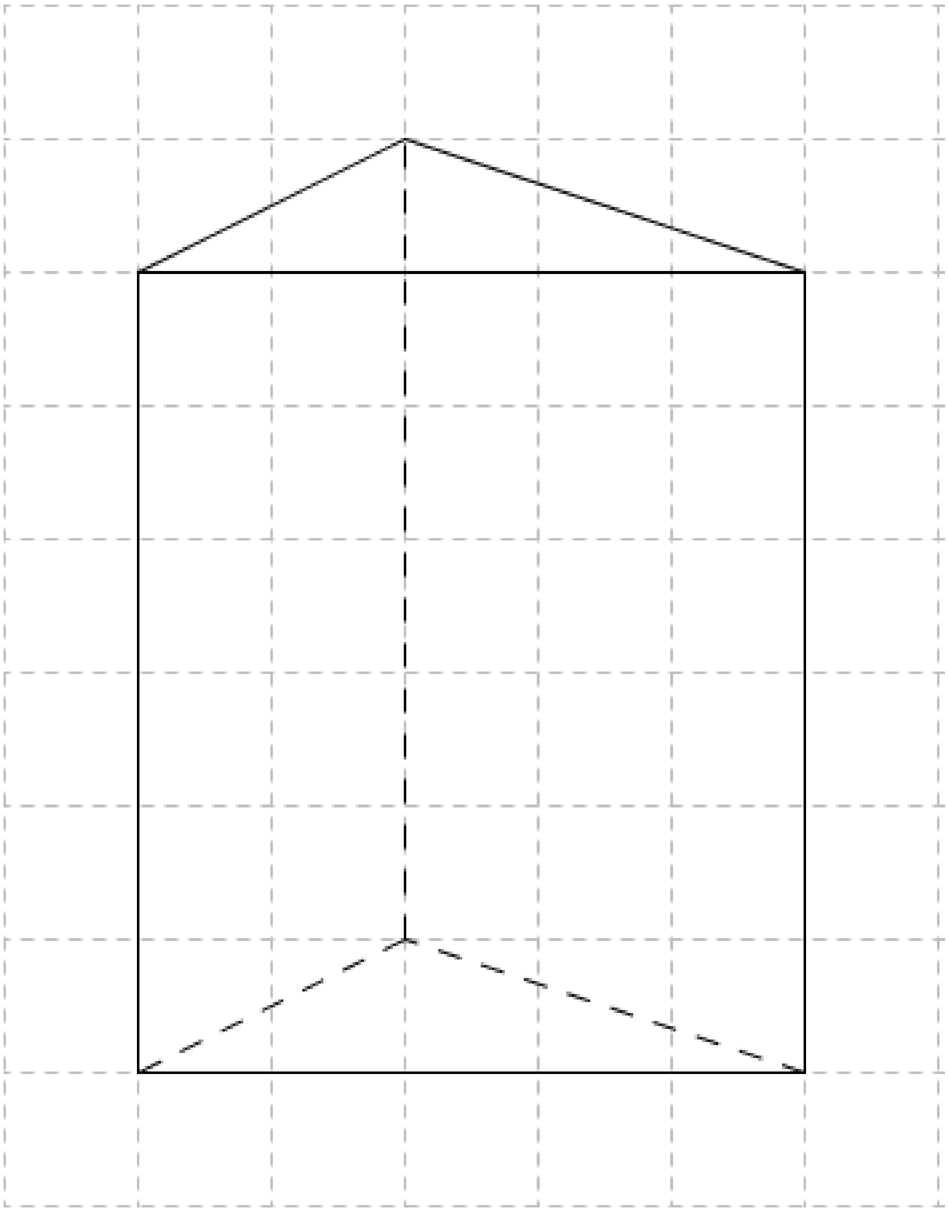
2. Patron d’un prisme droit

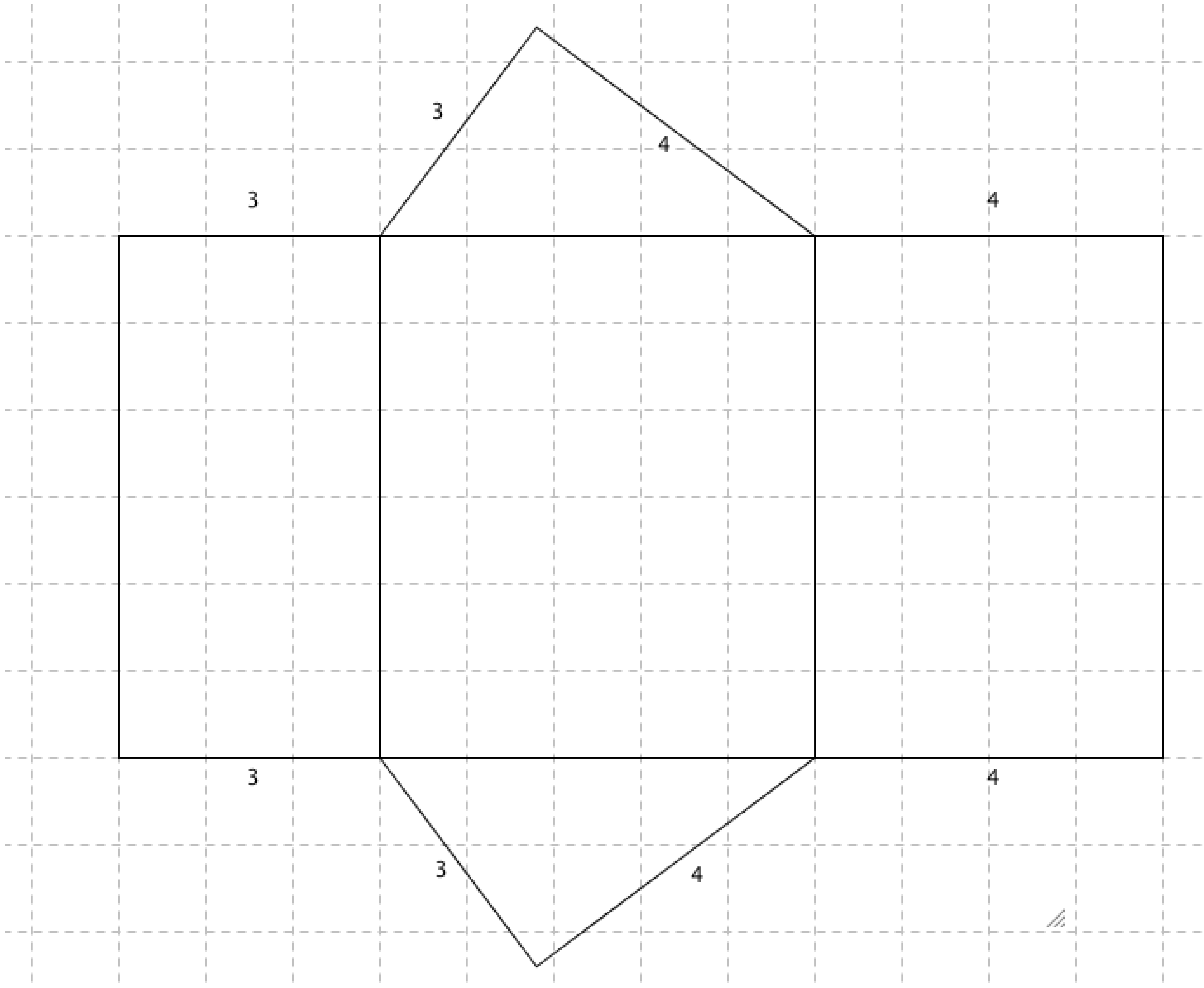
Exercice :

1. Représenter en perspective cavalière un prisme droit dont les bases sont des triangles de dimensions 3 cm, 4 cm et 5 cm et dont la hauteur mesure 6 cm.

2. Dessiner une patron de ce prisme droit.

Remarque : Pour un prisme droit donné, il existe plusieurs patrons.




3
4
3
4
3
4
3
4

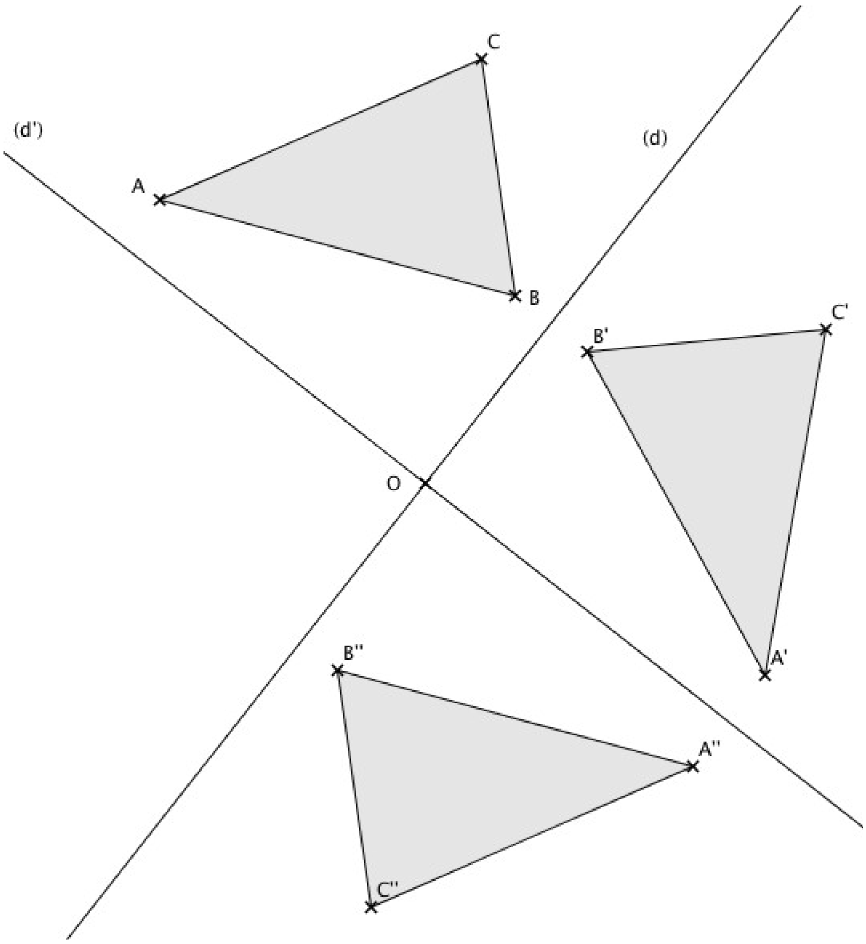
Chapitre 8 : Symétrie centrale 1.

1. Définition.

Exercice :

Soient ABC un triangle, *(d)* et *(d')* deux droites perpendiculaires en O.

Tracer l'image de ABC par la symétrie d'axe *(d)* suivi de la symétrie d'axe *(d')*.



On appelle respectivement A', B' et C' les symétriques respectifs de A, B et C par rapport à *(d)*.

On appelle respectivement A", B" et C" les symétriques respectifs de A', B' et C' par rapport à *(d')*.

Vocabulaires :

A", B" et C" sont les images de A, B et C par <u>la composée</u> de la symétrie d'axe *(d)* et la symétrie d'axe *(d')*.

Conjectures :

- Il semble que A"B"C" soit l'image de ABC par « un demi-tour de centre O ».
- Il semble que les segments [AA'], [BB'] et [CC'] aient tous O pour milieu.

D'où la définition suivante :

<u>Définition :</u>

Soit O, A et A' trois points.

A' est <u>l'image de A par la symétrie centrale de centre O</u> signifie que O est le milieu de [AA'].

On dit aussi que A' est le symétrique de A par rapport à O.

Remarques :

- Le point O est sa propre image par la symétrie centrale de centre O.
  Autrement dit le point O est <u>invariant</u> par la symétrie centrale de centre O.
- Le point O est d'ailleurs l'unique point invariant par la symétrie de centre O.

On admet la propriété suivante :

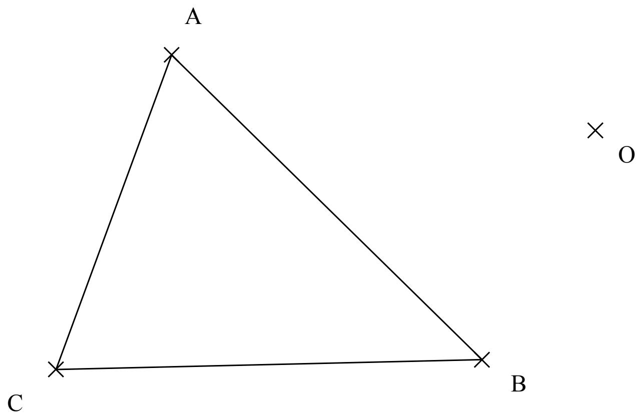
Propriété :

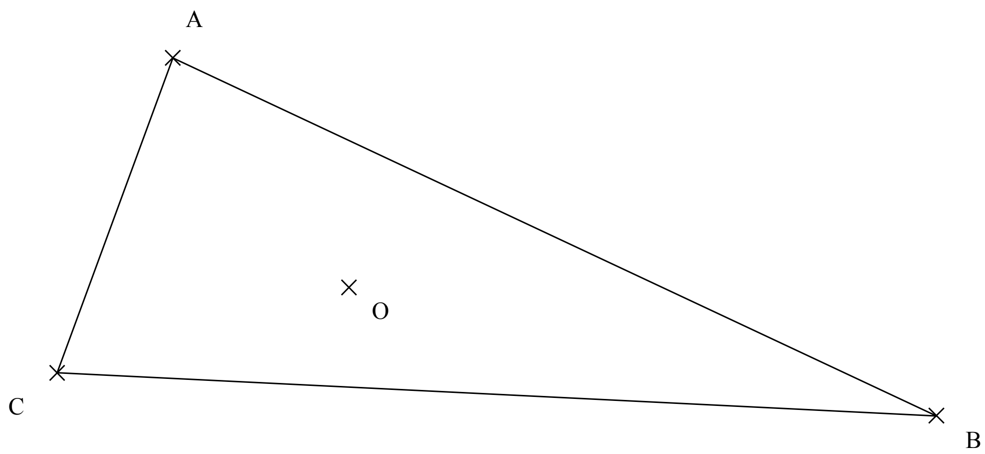
Soient *(d)* et *(d')* deux droites perpendiculaires en un point O.

La composée de la symétrie d'axe *(d)* et de la symétrie d'axe *(d')* est la symétrie de centre O.

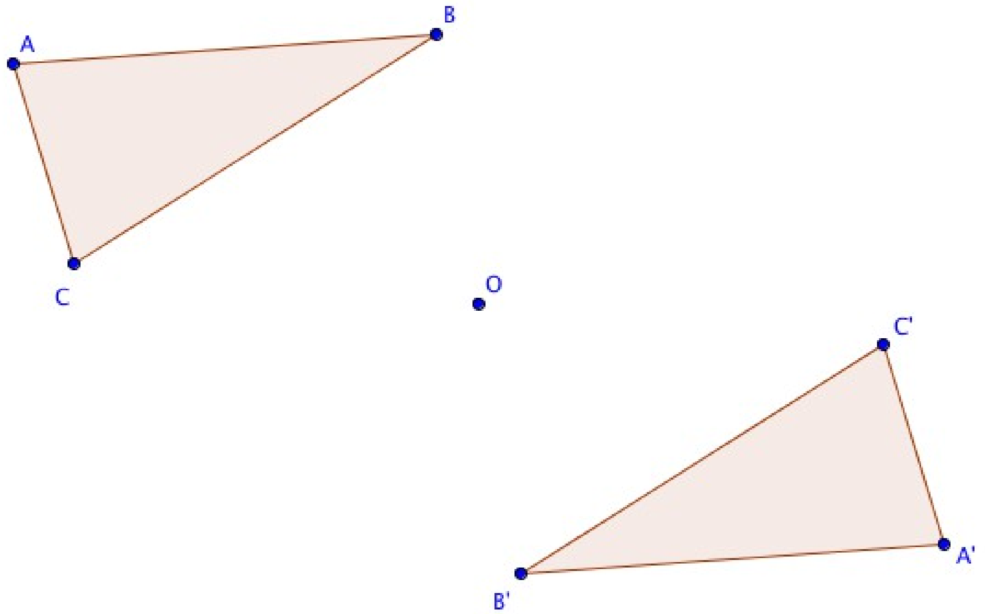
Construction points par points de l’image d’une figure donnée par une symétrie centrale donnée :

Dans chacun des cas ci-dessous, tracer l’image du triangle ABC par la symétrie centrale de centre O :





2. Propriétés de la symétrie centrale



Une symétrie centrale étant la composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires, on en déduit que toutes les propriétés de la symétrie axiale sont aussi des propriétés de la symétrie centrale.

On admet les propriétés suivantes :

Propriétés :

1. **Une symétrie centrale transforme un angle en un angle qui lui est égal.**
2. **Une symétrie centrale transforme trois points alignés en trois points alignés.**
   En particulier, une symétrie centrale transforme une droite en une droite.
3. **Une symétrie centrale transforme une figure en une figure de même aire.**
4. **Une symétrie centrale transforme un cercle en un cercle de même diamètre et dont le centre est l'image du centre du cercle initial.**
5. **Une symétrie centrale transforme un segment en un segment de même longueur.**

Remarque : La dernière propriété est fausse pour une symétrie axiale.

Chapitre 9 : Diviseurs multiples d'un nombre entier naturel

1. Définitions

Définition :

Un nombre entier b est un multiple d'un nombre entier a signifie qu'il existe un nombre entier c tel que $b = a \times c$.

Dans ce cas, on dit aussi que a est un diviseur de b ou que b est divisible par a.

Exemples :

7 et 4 sont des diviseurs de 28.

28 est un multiple de 7 et de 4.

2. Critères de divisibilité par 2, 4, 5, 3 et 9

On admet les propriétés suivantes :

Propriétés :

Soit n un nombre entier.

- **Si le chiffre des unités de n est 0, 2, 4, 6 ou 8 alors n est un multiple de 2.**
  Si n est un multiple de 2, alors son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- **Si le chiffre des unités de n est 0 ou 5 alors n est un multiple de 5.**
  Si n est un multiple de 5, alors son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Si le nombre formé par les deux deniers chiffres de n est un multiple de 4 alors n es un multiple de 4.**
  Si n est un multiple de 4 alors le nombre formé par les deux derniers chiffres de n est un multiple de 4.
- **Si la somme des chiffres de n est un multiple de 3 alors n est un multiple de 3.**
  Si n est un multiple de 3, alors la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- **Si la somme des chiffres de n est un multiple de 9 alors n est un multiple de 9.**
  Si n est un multiple de 9, alors la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples :

- 5 841 est un multiple de 9 car 5 + 8 + 4 + 1 = 18 et 18 est un multiple de 9.
- 118 n'est pas un multiple de 9 car 1 + 1 + 8 = 10 et 10 n'est pas un multiple de 9.
- 567 116 est un multiple de 4 car 16 est un multiple de 4.

Chapitre 10 : Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

1. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

1.1 Conjecture

Dans le cahier d'exercices, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture :

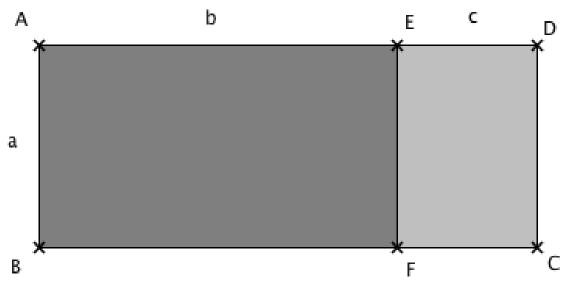
Il semble que pour tous nombres positifs *a, b* et *c*, on ait :

$$a(b + c) = ab + ac$$

1.2 Démonstration

Hypothèse : Soient *a, b* et *c* trois nombres positifs.

Idée : le produit de deux nombres positifs correspond au calcul de l'aire d'un rectangle dans le cadre géométrique.



Données :

- ABCD est un rectangle tel que : AB = *a* et AD = *b*.
- E et F sont deux points appartenant respectivement à [AD] et [BC] tels que : AE = *b* et ED = *c*.

On admet que AEFB et EDCF sont deux rectangles.

On a d'une part :

$A_{ABCD} = AB \times AD$

$\quad = a(b + c)$

Et d'autre part :

$A_{BCD} = A_{AEFB} + A_{EDCF}$

$\quad = ab + ac$

On en déduit que :

$$a(b + c) = ab + ac$$

On vient de démontrer partiellement le théorème suivant :

Théorème :

Pour tous nombres positifs *a, b* et *c*, on a :

$$a(b+c) = ab + ac$$

On a admet le théorème suivant :

Théorème :

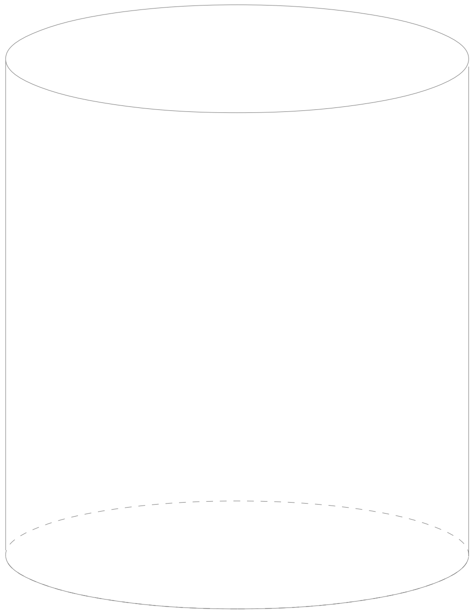
Pour tous nombres positifs *a, b et c*, avec $b \geqslant c$ **on a :**

$$a(b-c) = ab - ac$$

2. Application au calcul mental

- $21 \times 45 = (20 + 1) \times 45 = 20 \times 45 + 1 \times 45 = 900 + 45 = 945$
- $19 \times 45 = (20 - 1) \times 45 = 20 \times 45 - 1 \times 45 = 900 - 45 = 855$

Chapitre 12 : Géométrie dans l'espace 2



« Image mentale » : Un cylindre de révolution est un solide engendré par un rectangle qui tourne autour de l'un de ses côtés.

Remarque : Les bases du cylindre de révolution sont deux disques de même rayon.

Définition
La droite qui passe par les centres des deux disques de base est appelé l'axe du cylindre.

On admet la propriété suivante :

Propriété
Les deux disques de base d'un cylindre de révolution sont parallèles.

Exercice :

Dessiner un patron d'un cylindre de révolution de hauteur 6 *cm* dont les disques de base ont pour rayon 3 *cm*.

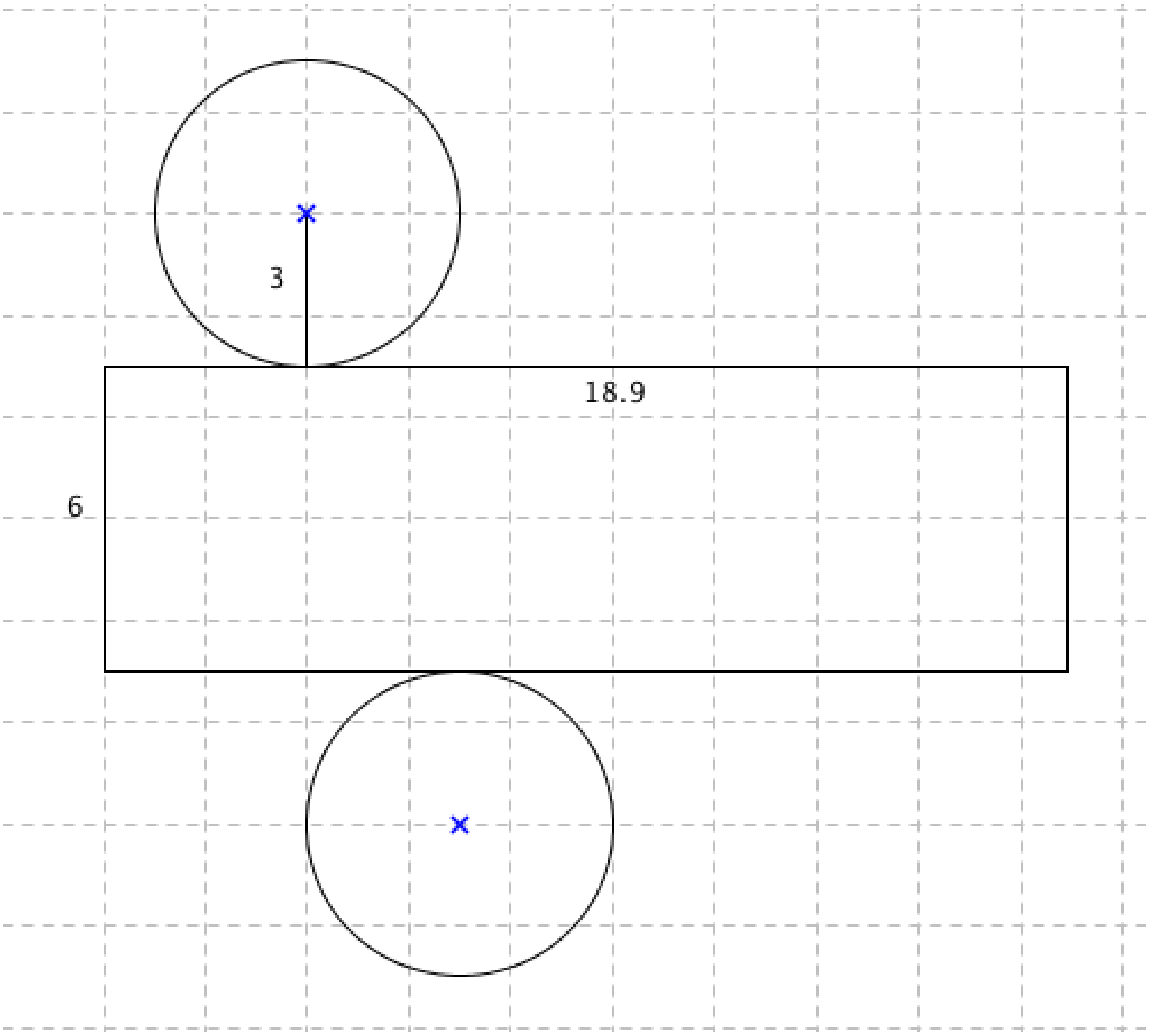
On commence par calculer le périmètre des disques de base :

P = $2\times\pi\times3$

P = 6π

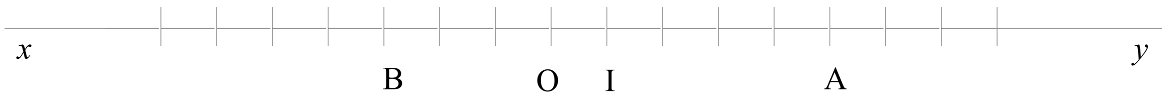
P ≈ 18,84

Le périmètre des disques de base est environ égal à 18,9 *cm* par arrondi au dixième.


3
18.9
6

Chapitre 13 : Nombres relatifs 2.

1. Repérage sur une droite graduée



Soit *(xy)* une droite , O et I deux points distincts de la droite.

A tout point de la droite *(xy)*, on associe le nombre noté x_A tel que :

- x_A est positif si A $\in$ [OI) et x_A est négatif A $\notin$ [OI)
- OA = $|x_A| \times$ OI ($|x_A|$ étant la valeur absolue de x_A)

x_A s'appelle **l'abscisse** de A.

- O $\in$ [OI) et OO = 0 $\times$ OI donc $x_0 = 0$
- I $\in$ [OI) et OI = 1 $\times$ OI donc $x_I = 1$

Autrement dit l'abscisse de O est 0 et celle de I est 1.

Vocabulaires :

- (O,I) est **un repère** de la droite *(xy)*.
- O est **l'origine** de ce repère et I est le **« point unité »** du repère (O,I).

Exemples :

- A $\in$ [OI) et OA = 5 $\times$ OI donc l'abscisse de A est le nombre 5.
- B $\notin$ [OI) et OB = 3 $\times$ OI donc l'abscisse de B est le nombre -3.

Remarques :

- Tout point de la droite graduée est associé à un nombre relatif.
- Réciproquement tout nombre relatif est associé à un point de la droite graduée.

On admet la propriété suivante :

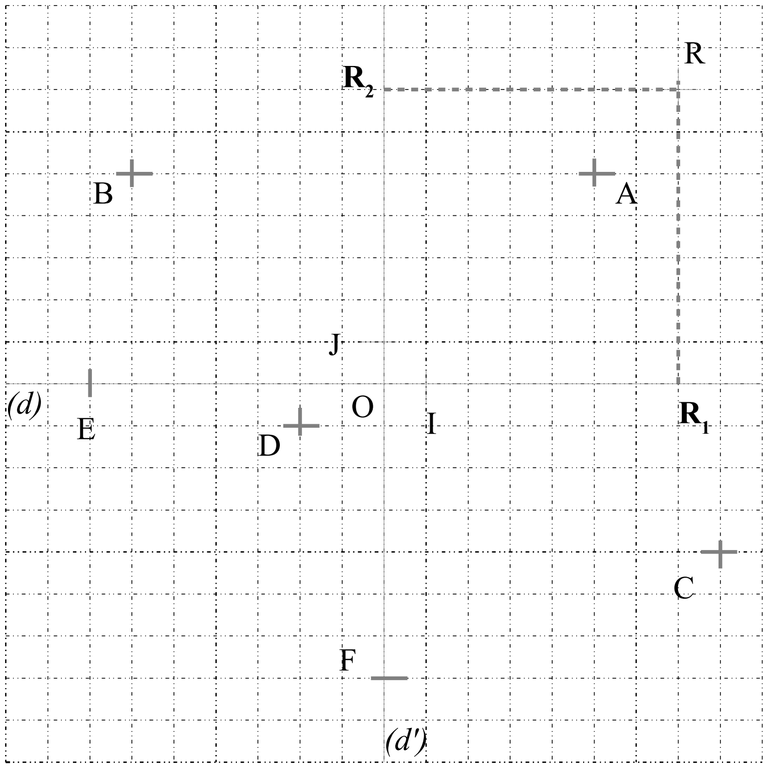
Propriété :

- **Si deux nombres relatifs sont de signes contraires, le plus grand des deux est celui qui est positif.**
- **Si deux nombres relatifs sont négatifs, le plus grand des deux est celui qui a la plus petite valeur absolue.**
- **Si deux nombres relatifs sont positifs, le plus grand des deux est celui qui a la plus grande valeur absolue.**

Remarques :

- 0 est le plus grand des nombres relatifs négatifs.
- 0 est le plus petit des nombres relatifs positifs.

2. Repérer dans le plan



Soit *(d)* et *(d')* deux droites perpendiculaires en O.

Soient (O,I) un repère de *(d)* et (O,J) un repère de *(d')*.

Soit R un point du plan.

- On appelle R_1, le point d'intersection de *(d)* et de la droite parallèle à *(d')* passant par R.
- On appelle R_2, le point d'intersection de *(d')* et de la droite parallèle à *(d)* passant par R.

Vocabulaires :

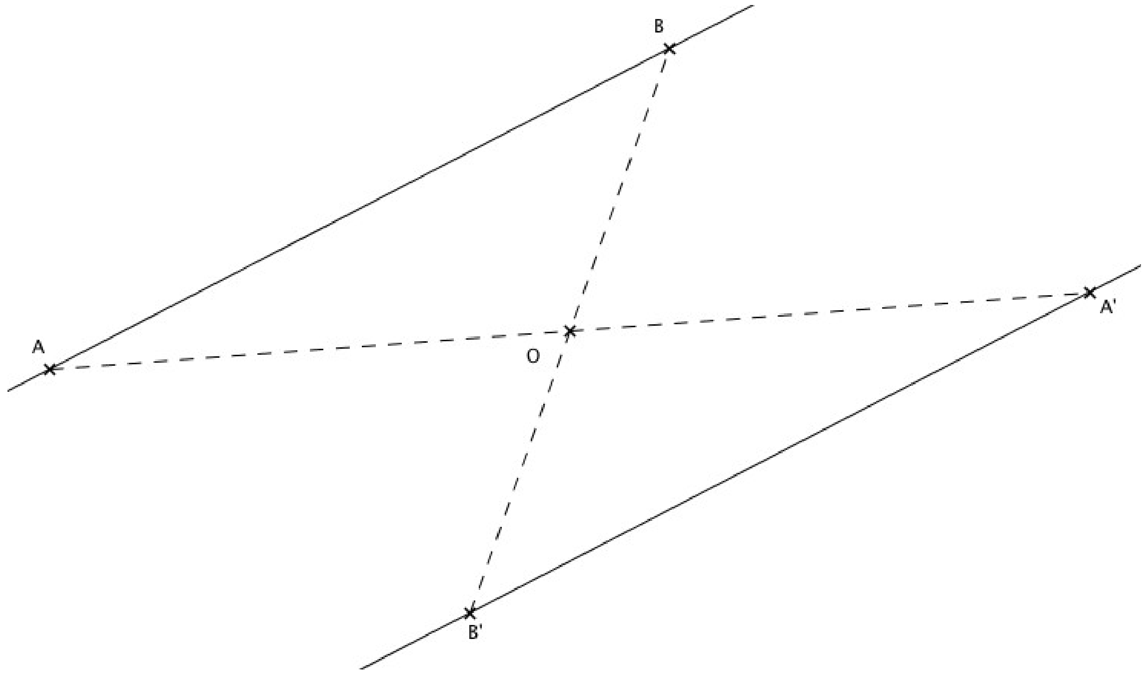
- L'abscisse de R_1 dans le repère (O,I) est appelé **l'abscisse** de R, on note x_R ce nombre.
- L'abscisse de R_2 dans le repère (O,J) est appelé **l'ordonnée** de A., on note y_R ce nombre.
- Le couple de nombres (x_R, y_R) est appelé le couple de **coordonnées** de R dans le repère (O,I,J).
- *(d)* est appelé **l'axe des abscisses** et *(d')* est appelé **l'axe des ordonnées**.
- (O,I,J) est **un repère orthogonal du plan**.
- O est **l'origine du repère**.
- Lorsque OI = OJ, on dit que le repère est **orthonormé.**

Chapitre 14 : Symétrie centrale 2

1. Conjecture

Données :

- A et B sont deux points distincts et O est un point qui n'appartient pas à (AB)
- Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport au point O.



Dans l 'exercice 14.1, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture : Il semble que les droites (AB) et (A'B') soient parallèles.

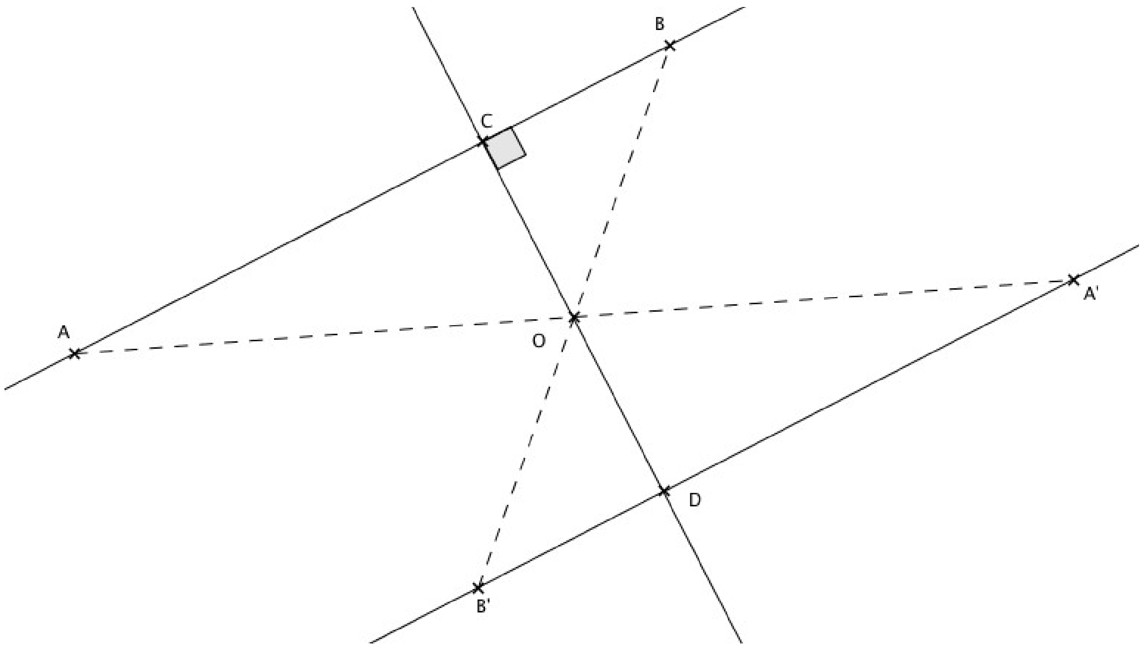
2. Démonstration

Hypothèses :

- A et B sont deux points distincts et O est un point qui n'appartient pas à (AB)
- Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport au point O.

On appelle *(d)* la droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

La droite *(d)* coupe les droites (AB) et (A'B') respectivement en C et D.



- **<u>On démontre que D est le symétrique de C par rapport à O</u>**

  Le symétrique de C par rapport à O appartient à la droite (OC).
  C appartient à la droite (AB) donc son symétrique appartient au symétrique de la droite (AB) par rapport à O, c'est à dire à la droite (A'B').
  Finalement, le symétrique de C par rapport à O appartient à la droite *(d)* et à la droite (A'B'), c'est donc le point D.

- **<u>On démontre que (A'B') et *(d)* sont perpendiculaires</u>**

  On sait que : B', D et C sont les symétriques respectifs de B, C et D par rapport à O.

  Propriété : Une symétrie centrale transforme un angle en un angle qui lui est égal.

  Conclusion : $\widehat{B'DC} = \widehat{BCD} = 90°$

  On en déduit que les droites (A'B') et *(d)* sont perpendiculaires.

- **<u>On démontre que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.</u>**

  On sait que : les droites (AB) et (A'B') sont toutes les deux perpendiculaires à la droite *(d)*.

  Théorème : Si deux droites sont perpendiculaires à la même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

  Conclusion : Les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

Remarque :

Si O appartient à la droite (AB), alors le symétrique de la droite (AB) par rapport à O est la droite (AB) elle-même. (Elle est invariante par la symétrie de centre O).
Donc la droite (AB) et sa symétrique par rapport à O sont confondues et donc parallèles.

3. Enoncé de la propriété

Dans le paragraphe 2, on a démontré la propriété suivante :

Propriété : **Un symétrie centrale transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.**

Chapitre 15 : Calcul littéral 1.

1. Appliquer une formule. Variables.

Exemple 1 :

Pour tout nombre x, on pose : $A(x) = 1 + 3x$

On a :

$A\ (4) = 1 + 3 \times 4$

$\quad = 1 + 12$

$\quad = 13$

$A\ (10) = 1 + 3 \times 10$

$\quad = 1 + 30$

$\quad = 31$

Remarque : la lettre x désigne ici une variable.

Exemple 2 :

Pour tous nombres x *et* y, on pose : $B(x\ ;\ y) = 2x - 3y + 4$

On a :

$B(10\ ;\ 6) = 2 \times 10 - 3 \times 6 + 4$

$\quad = 20 - 18 + 4$

$\quad = 6$

Remarques : les lettres x et y désignent ici deux variables.

2. Utilisation du tableur

Exemple 1 :

B2 =1 + 3*B1

	A	B	C	D	E	F
1	x	1	3	5	7	189
2	$A(x)$	4	10	16	22	568
3						

Exemple 2

B3 =2*B1-3*B2+4

	A	B	C	D	E	F
1	x	3	7	10	11	135
2	y	1	5	7	2	12
3	$B(x\,;y)$	7	3	3	20	238
4						

Chapitre 16 : Nombres en écriture fractionnaire 1

1. Définitions.

1.1 Définition

<u>Définition :</u>

Soient *a* et *b* avec $a \neq 0$.

$\frac{b}{a}$ **est une écriture fractionnaire du quotient de *b* par *a*.**

C'est-à-dire que $a \times \frac{b}{a} = b$

Vocabulaires : lorsque *a* et *b* sont des nombres entiers (*a* non nul),   est appelée une <u>fraction</u>

1.2 Exemples

Equations d'inconnue x	Solution de l'équation	Ecritures décimales du quotient	Ecritures fractionnaires du quotient
$6 \times x = 24$			
$25 \times x = 6$			
$5 \times x = 4{,}5$			
$9 \times x = 1$			
$2 \times x = 1$			
$200 \times x = 75{,}4$			
$11 \times x = 14$			

3. Différentes écritures fractionnaires d’un quotient

2.1. Conjecture

Dans le cahier d'exercices, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture :

Il semble que pour tous nombres *a, b* et *k* avec *b* et *k* tous les deux non nuls, on ait :

$$\frac{b}{a}=\frac{b\times k}{a\times k}$$

2.2. Démonstration

Soient *a, b* et *k* trois nombres avec *b* et *k* tous les deux non nuls.

On a : $a\times\frac{b}{a}=b$ <u>par définition</u>.

On en déduit que : $k\times(a\times\frac{b}{a})=k\times b$

Puis : $(k\times a)\times\frac{b}{a}=k\times b$

Donc $\frac{b}{a}=\frac{b\times k}{a\times k}$ par définition du quotient de $k \times a$ par $k \times b$

2.3.Théorème

On vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème :

En multipliant ou en divisant par un même nombre non nul le numérateur et le dénominateur de l'écriture fractionnaire d'un nombre, on obtient une autre écriture fractionnaire de ce nombre.

Autrement dit :

Quelque soit le nombre *a* et quelques soient les nombres non nuls *b* et *k* :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a\div k}{b\div k}$$

Exemples :

$$\frac{18}{12}=\frac{9\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{6} \quad ; \quad \frac{18}{12}=\frac{6\times 3}{4\times 2}=\frac{6}{4} \quad ; \quad \frac{18}{12}=\frac{3\times 6}{2\times 6}=\frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{18}{12}=\frac{18\times 2}{12\times 2}=\frac{36}{24}$$

$\frac{9}{6}$ **;** $\frac{6}{4}$ **;** $\frac{3}{2}$ **et** $\frac{18}{12}$ sont quatre écritures fractionnaires du même nombre

Vocabulaires

- $\frac{9}{6}$; $\frac{6}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont des écritures simplifiées de $\frac{18}{12}$.
- $\frac{3}{2}$ ne peut plus être simplifiée, elle est dite irréductible.

Conséquence : Un quotient a une infinité d'écritures fractionnaires.

Chapitre 17 : Aire du disque.

On admet le théorème suivant :

Théorème :

Soit *r* un nombre positif.

L'aire *A* d'un disque de rayon *r* est donnée par la formule suivante :

$$A = \pi r^2$$

Exemple :

Calculer l'aire A, d'un disque de rayon 3 *cm*.

$$\begin{aligned} A &= \pi \times 3^2 \\ &= 9\,\pi \\ &\approx 28 \end{aligned}$$

L'aire d'un disque de rayon 3 *cm* est égale à $9\,\pi$ cm^2 soit environ 28 cm^2 par arrondi à l'unité près.

Chapitre 18 : Quotient de deux nombres décimaux.

Exercice

Chez le marchand de fruits et légumes, Lucas a acheté des fruits qui coûtaient 3,6 euros le kilogramme.

Il a payé 4,5 euros.

Quelle masse de fruits a-t-il acheté ?

On appelle x la masse de fruits achetée en kilogramme ?

x est solution de l'équation suivante :

$$3{,}6x = 4{,}5$$

x est donc le quotient de 4,5 par 3,6.

Soit : $x = \dfrac{4{,}5}{3{,}6}$

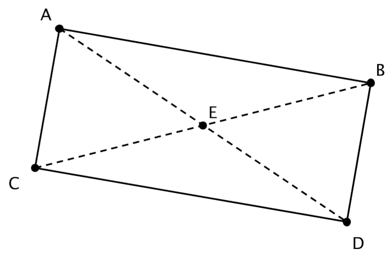
On a aussi : $x = \dfrac{4{,}5}{3{,}6} = \dfrac{4{,}5 \times 10}{3{,}6 \times 10} = \dfrac{45}{36}$

En posant la division, on obtient finalement que : $\dfrac{45}{36} = 1{,}25$

Conclusion : Lucas a acheté 1,25 kg de fruits.

Chapitre 19 : Parallélogrammes 1

1. Centre de symétrie d'une figure.



Hypothèses :

ABDC est un rectangle.

[AD] et [BC] se coupent en E.

On a vu en classe de sixième qu'un rectangle avait ses diagonales qui se coupaient en leur milieu.

Donc : les symétriques respectifs de A et C par rapport à E sont D et B.

On en déduit que le symétrique de ABDC par rapport au point E est ABDC lui-même.

On dit que E est un centre de symétrie de ABCD.

Définition :

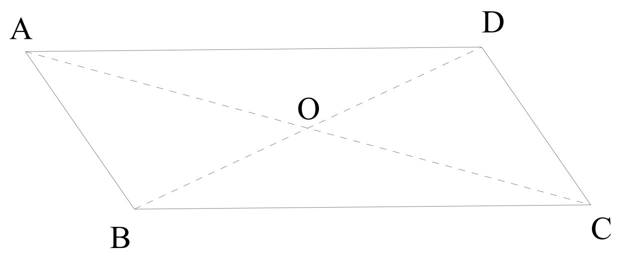
Un point O est un centre de symétrie d'une figure signifie que la figure est invariante par la symétrie de centre O.

Exemples : exercices 47 et 48 p 162.

Remarques :

- Une figure peut ne pas avoir de centre de symétrie.
- Tous les points d'une droite sont des centres de symétrie de la droite.

2. Définitions.



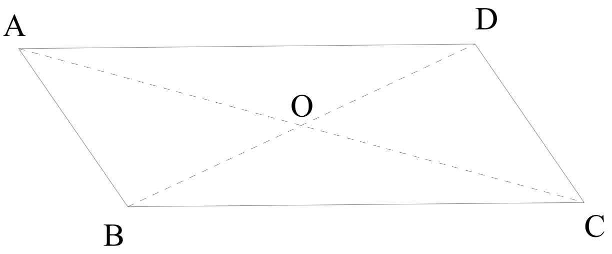
Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui possède un centre de symétrie, appelé centre du parallélogramme.

Remarques:

- Attention, il existe deux types de quadrilatères ayant un centre de symétrie : ceux qui sont croisés et ceux qui ne le sont pas.
- Un quadrilatère non croisé est aussi appelé un quadrilatère convexe.
- Si ABCD est un parallélogramme de centre O, alors puisque ABCD est non croisé, on en déduit que C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O et donc O est le point d'intersection des diagonales de ABCD.

3. Propriétés

	**Hypothèse :** ABCD est un parallélogramme de centre O.

1. Etude des diagonales :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

Donc : par définition, O est le centre de symétrie de ABCD.

Donc : C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

Donc : O est le milieu de [AC] et [BD].

Autrement dit : les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu.

2. Etude des angles opposés

On sait que : ABCD est un parallélogramme de centre O donc C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

Propriété : Une symétrie centrale transforme un angle en un angle qui lui est égal.

Conclusion : Les angles opposés de ABCD sont égaux.

3. Etude des côtés opposés

On sait que : ABCD est un parallélogramme de centre O donc C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

Propriété : Une symétrie centrale transforme un segment en un segment de même longueur et une droite en une droite qui lui est parallèle.

Conclusions :

- Les côtés opposés de ABCD sont de même longueur.
- Les supports des côtés opposés de ABCD sont parallèles.

On vient de démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés

1. **Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.**
2. **Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure deux à deux.**
3. **Si un quadrilatère est un parallélogramme alors les supports de ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.**
4. **Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur deux à deux.**

Chapitre 20 : Calcul littéral 2.

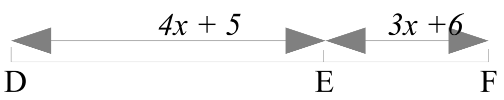
1 . Simplifier une expression littérale.

1.1 Premier exemple

Toutes les mesures de longueurs sont exprimées en *cm*.

x est un nombre supérieur à - 2.

Les points D, E et F sont alignés dans cet ordre



Pour tout nombre x supérieur à - 2, on note $f(x)$ la longueur DF.

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation : Pour tout nombre x, on a : $f(x) = 18x$

Essayons avec x = 3 :

DE = $4 \times 3 + 5 = 17$ et EF = $3 \times 3 + 6 = 15$

Donc : $f(3) = 17 + 15 = 32$

D'autre part : $18 \times 3 = 54$

Donc : $f(3) \neq 18 \times 3$

Conclusion : L'affirmation est fausse.

Remarque : Pour justifier que l'affirmation est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

Etude du cas général :

Pour tout nombre x supérieur à -2, on a :

$f(x) = 4\boldsymbol{x} + 5 + 3\boldsymbol{x} + 6$

$f(x) = 4\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{x} + 5 + 6$

$f(x) = (4 + 3)\boldsymbol{x} + 11$ **On applique <u>la distributivité</u> dans le sens de <u>la factorisation</u>.**

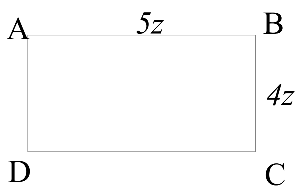
$f(x) = 7\boldsymbol{x} + 11$

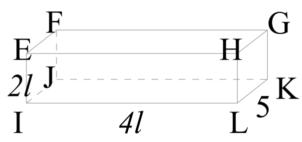
1.2. Deuxième exemple :

Exercice 20.2

Toutes les mesures de longueurs sont exprimées en *cm*.

z et *l* sont deux nombres positifs





Pour tout nombre z positif, on note $A(z)$ l'aire du rectangle ABCD.

Pour tout nombre positif l, on note $V(l)$, le volume du pavé EFGHIJKL.

Pour tout nombre z positif, on a :

$A(z) = 4z \times 5z$

$A(z) = 4 \times 5 \times z \times z$ **La multiplication est commutative et associative.**

$A(z) = 20z^2$ **On en déduit que : multiplier plusieurs facteurs peut se faire dans n'importe quel ordre.**

Pour tout nombre l *positif*, on a :

$V(l) = 5 \times 2l \times 4l$

$V(l) = 5 \times 2 \times 4 \times l \times l$

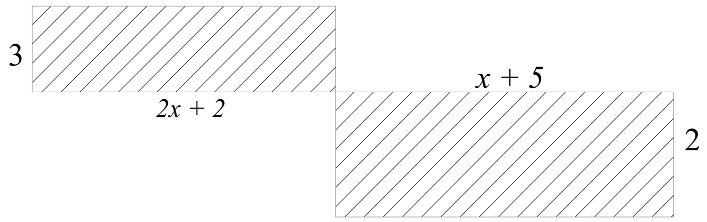
$V(l) = 40\, l^2$

2. Développer une expression littérale à l'aide de la distributivité

Exercice

Toutes les mesures de longueurs sont exprimées en *cm*.

$\boldsymbol{x}$ est un nombre supérieur à -1.



Pour tout nombre x supérieur à -1, on note $A(x)$, l'aire de la figure hachurée.

Etude d'un cas particulier :

Pour $x = 4$:

$$A(4) = \underbrace{3\times(2\times4+2)}_{\text{aire du premier rectangle}} + \underbrace{2\times(4+5)}_{\text{aire du deuxième rectangle}}$$

$$A(4) = 3\times10+2\times9$$

$$A(4) = 30+18 = 48$$

Pour $x = 4$, l'aire de la partie hachurée est égale à 48 cm^2

Etude du cas général :

Soit x un nombre supérieur à -1, on a :

$$A(x) = \underbrace{3\times(2x+2)}_{\text{aire du premier rectangle}} + \underbrace{2\times(x+5)}_{\text{aire du deuxième rectangle}}$$

$A(x) = 3 \times 2x + 3 \times 2 \quad + \quad 2 \times x + 2 \times 5$ **On utilise <u>la distributivité</u> dans le sens du <u>développement</u>.**

$A(x) = 6x + 6 + 2x + 10$

$A(x) = 6x + 2x + 6 + 10$

$A(x) = 8x + 16$

Pour tout nombre x, supérieur à -1, l'aire de la partie hachurée est égale à $8x + 16$ cm^2

Chapitre 21 : Proportionnalité 3

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation : Si un article augmente de 20 % puis baisse de 20 % alors il est revenu à son prix initial.

Essayons :

Supposons que l'article coûte 100 €, alors il augmente de 20 €.

Son nouveau prix est alors de 120 €.

Prix (€)	100	1	120
Baisse (€)	20	$\frac{20}{100}$	$\frac{20}{100}\times 120 = 24$

L'article baisse donc de 24 €.

120 – 24 = 96

Finalement l'article coûte 96 €.

Conclusion :

L'article n'est pas revenu à son prix initial.

L'affirmation est donc fausse.

Etude du cas général :

Soient x et t deux nombres positifs.

On souhaite calculer t % du nombre x

Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

On effectue un retour à l'unité :

t	$\frac{t}{100}$	$\frac{t}{100} \times x$
100	1	x

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soient x et t deux nombres positifs.

Pour calculer t % du nombre x, on calcule le produit de x par $\frac{t}{100}$.

Chapitre 22 : Parallélogrammes 2

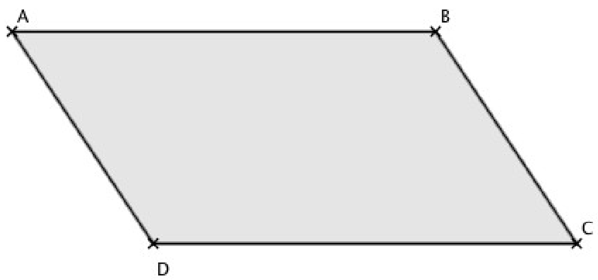
1. Aire du parallélogramme

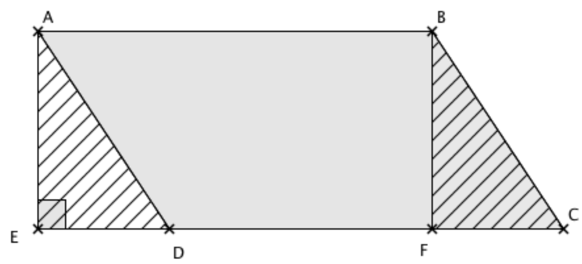
Données :

- ABCD est un parallélogramme.
- E est le point d'intersection de (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par A.
- F est le point d'intersection de (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par B.

Cas 1

Cas 2





On peut démontrer que :

- ABFE est un rectangle.
- Les triangles AED et BFC ont la même aire.
- DC = EF
- Le parallélogramme ABCD a la même aire que le rectangle ABFE.

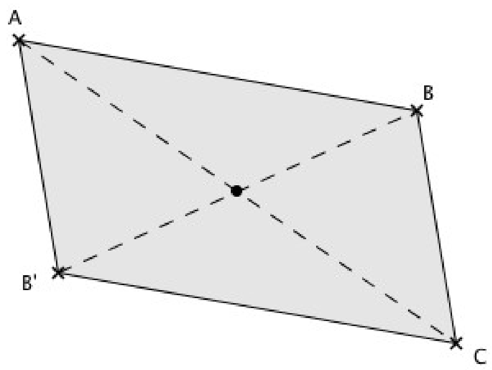
On admet le théorème suivant :

Théorème :
Soient ABCD est un parallélogramme et E, le point d'intersection de (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par A.
On a :

$$A_{ABCD} = \mathbf{AE} \times \mathbf{DC}$$

Où A_{ABCD} est l'aire du parallélogramme ABCD.

2. Propriétés caractéristiques du parallélogramme.



Les réciproques des propriétés du parallélogrammme (chapitre 19 paragraphe 3) sont-elles vraies ?

On admet les propriétés suivantes :

Propriétés :

1. **Si un quadrilatère a les supports de ses côtés parallèles deux à deux alors c’est un parallélogramme.**
2. **Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c’est un parallélogramme.**
3. **Si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés de même longueur deux à deux alors c’est un parallélogramme.**
4. **Si un quadrilatère convexe a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.**

Chapitre 23 : Nombres relatifs 3

1. Somme de nombres relatifs

On définit le calcul de la somme de deux nombres relatifs de la façon suivante :

Définition :

La somme de deux nombres relatifs de même signe est le nombre relatif tel que :

Son signe est le signe commun aux deux termes.

Sa valeur absolue est la somme des valeurs absolues des deux termes.

La somme de deux nombres relatifs de signes contraires est le nombre relatif tel que :

- **Son signe est celui du terme qui a la plus grande valeur absolue.**
- **Sa valeur absolue est la différence des valeurs absolues des deux termes (on soustrait la plus petite des valeurs absolues à la plus grande).**

Exemples :

A = (-4) + (-3) A = (-7)	➢ Les deux termes sont **négatifs** donc la somme est également un nombre **négatif.** ➢ On calcule alors **la somme des valeurs absolues** et on trouve 7.
B = (-12) + (+17) B = (+ 5)	➢ Les deux termes sont de **signes contraires** donc la somme est un nombre relatif du signe du terme ayant **la plus grande valeur absolue**, ici ce terme est (+17). La somme est donc un nombre **positif**. ➢ On calcule alors **la différence** des distances à zéro et on trouve 5.
C = (-12) + (+6,4) C = (-5,6)	➢ Les deux termes sont de **signes contraires** donc la somme est un nombre relatif du signe du terme ayant **la plus grande valeur absolue**, ici ce terme est (-12). La somme est donc un nombre **négatif**. ➢ On calcule alors **la différence** des distances à zéro et on trouve 5,6.

2. Propriété et application au calcul de la somme de plusieurs nombres relatifs.

On admet les propriétés suivantes :

<u>**Propriétés :**</u>

Pour tous nombres *a*, *b* et *c*, on a :

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Remarques :

- Le premier point de la propriété permet de <u>commuter</u> des termes dans une suite d'additions.
- Le deuxième point de la propriété permet <u>d'associer</u> les termes « comme on veut » dans une suite d'additions.

Application au calcul de la somme de plusieurs nombres relatifs.

Calculer A = (-5) + (+3) + (-12) + (+4) + (-7)

Etapes de calculs	Justifications
A = (-5) + (+3) + (-12) + (+4) + (-7) A = [(-5) + (+3)] + [(-12) + (+4)] + (-7) A = [(+3) + (-5)] + [(+4) + (-12)]+ (-7) A = (+3) + [(-5) + (+4)] + (-12) + (-7) A = (+3) + [(+4) + (-5)] + (-12) + (-7) A = [(+3) + (+4)] + [(-5) + (-12) + (-7)] A = (+7) + (-24) A = -17	Propriété 2 Propriété1 Propriété 2 Propriété 1 Propriété 2

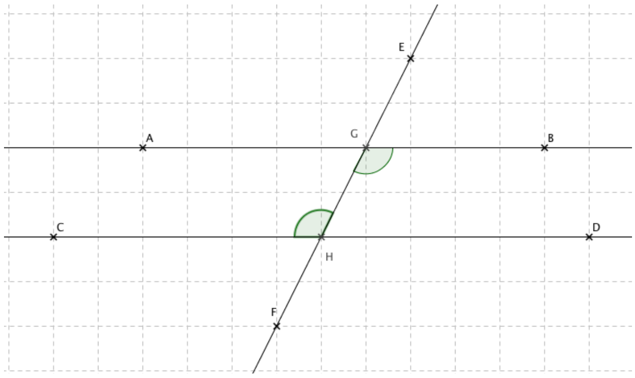
Remarques :

- Pour calculer la somme de plusieurs nombres relatifs, il est souvent judicieux de « regrouper » les termes positifs entre eux et les termes négatifs entre eux.

• Dans la pratique, on passe directement de la première à la 6$^{\text{ème}}$ ligne.

Chapitre 24 : Angles et parallélisme

1. Conjecture

	**Données :** La droite (EF) coupe les droites (AB) et (CD) respectivement en G et H

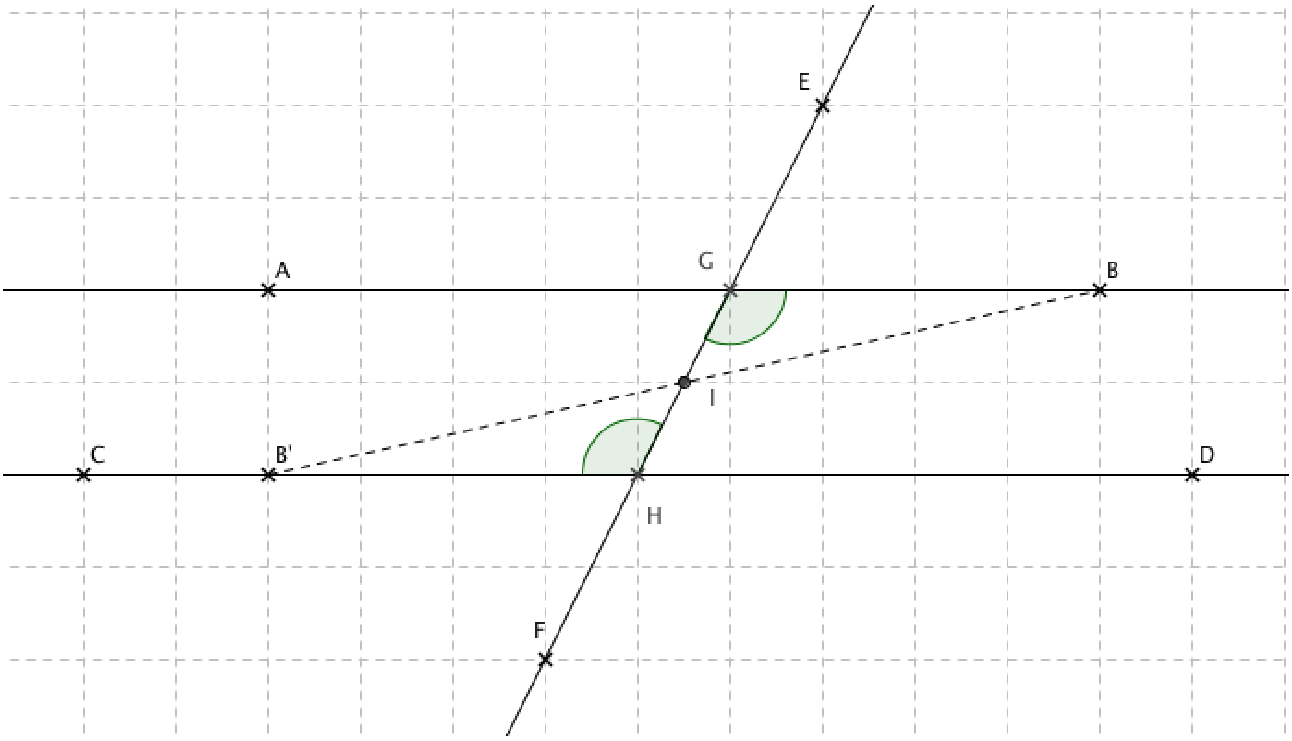
Conjecture :

Il semble que si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les angles alternes-internes $\widehat{FGB}$ et $\widehat{CHG}$ sont égaux.

2. Démonstration

Hypothèses :

- La droite (EF) coupe les droites (AB) et (CD) respectivement en G et H
- (AB) et (CD) sont parallèles.



On appelle I le milieu de [GH].

Idée : démontrer que les angles alternes-internes $\widehat{FGB}$ et $\widehat{CHG}$ sont symétriques par rapport à I.

1. On démontre que le symétrique de la droite (AB) est la droite (CD).

On sait que : H est le symétrique de G par rapport à I et G appartient à (AB).

Propriété : Un symétrie centrale transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

Conclusion : Le symétrique de la droite (AB) par rapport à I est une droite qui lui est parallèle et qui passe par H.
C'est donc la droite (CD).

2. On démontre que le symétrique de B, B', appartient à la droite (CD) :

B appartient à (AB) donc son symétrique par rapport à I appartient au symétrique de la droite (AB) par rapport à I, c'est à dire (CD).

Donc B' appartient à la droite (CD).

On en déduit que : $\widehat{GHC} = \widehat{GHB'}$

3. On démontre que : $\widehat{HGB} = \widehat{GHC}$

On sait que : G, H et B' sont les symétriques respectifs de H, G et B par rapport à I.

Propriété : Une symétrie centrale transforme un angle en un angle qui lui est égal.

Conclusion : $\widehat{HGB} = \widehat{GHB'} = \widehat{GHC}$

3. Enoncé de la propriété

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété : **Si deux angles sont en position d'angles alternes-internes par rapport à une droite sécante à deux droites parallèles alors ils sont égaux.**

Reprenons la démonstration du paragraphe 2, les angles $\widehat{GHC}$ et $\widehat{FHD}$ sont égaux car ils sont symétriques.

On en déduit que les angles correspondants $\widehat{HGB}$ et $\widehat{FHD}$ sont égaux.

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété : **Si deux angles sont en position d'angles correspondants par rapport à une droite sécante à deux droites parallèles alors ils sont égaux.**

Définition :

Deux angles sont opposés par le sommet signifie qu'ils ont le même somme et sont symétriques par rapports à ce sommet.

Une symétrie centrale transformant un angle en un angle qui lui est égal, on en déduit la propriété suivante :

Propriété :

Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils sont égaux.

4. Propriétés réciproques

On admet que les réciproques des propriété énoncées au paragraphe 3 sont vraies :

Propriétés :

1. Si deux angles, en position d'angles alternes-internes par rapport à une droite sécante à deux droites sont égaux alors ces deux dernières sont parallèles.

2. Si deux angles, en position d'angles correspondants par rapport à une droite sécante à deux droites sont égaux alors ces deux dernières sont parallèles.

Chapitre 25 : Nombres relatifs 4

1. Définitions.

On admet la propriété suivante :

Propriété

Soient a et b deux nombres.

Il existe un unique nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir a.

Autrement dit : l'équation d'inconnue x :

$$b + x = a$$

admet une unique solution.

Définition

Soient a et b deux nombres.

On appelle différence de a et b, la solution de l'équation d'inconnue x :

$$b + x = a$$

Exemples :

- 17 – (-9) est la solution de l'équation d'inconnue x : $(-9) + x = 17$.
  On a donc 17 – (-9) = 26
- (-9) – (+17) est la solution de l'équation d'inconnue x :$(+17) + x = (-9)$
  On a donc : (-9) – (-17) = (-26)
- (-5) – (-6) est la solution de l'équation d'inconnue x : $(-6) + x = (-5)$.
  On a donc (-5) – (-6) = (+1)

Remarque : *Si* a et b sont deux nombres alors en général $a - b \neq b - a$.

2. Calcul de la différence de deux nombres relatifs

2.1Problème

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation :

Pour calculer la différence d'un nombre *a* et d'un nombre *b*, il suffit de calculer la somme de *a* et de l'opposé de *b*.

2.2 Conjecture

Essayons :

1. *a = 10 et b = 5*

   On a : a – b = 10 – 5 = 5 et a + (-b) = 10 + (-5) = 5

2. *a = - 3 et b = -5*

   a – b = -3 - (-5) est par définition, la solution de l'équation x + (-5) = -3

   Donc a – b = -3 - (-5) = 2

   Et d'autre part : a + (-b) = -3 + 5 = 2

L'affirmation est donc vraie dans les deux cas particuliers ci-dessus.

On peut donc formuler la conjecture suivante :

Conjecture :

Soient *a* et *b* deux nombres.

Il semble que : *a – b = a + (-b)*

2.3 Démonstration

Hypothèse : *a et b sont deux nombres*

On a :

$b + (a + (-b)) = a + (b + (-b))$ *(propriété de l'addition)*

$= a + 0$

$= a$

Ainsi $a + (-b)$ *est le nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir a, mais ce nombre par définition est la différence de a et de b.*

On a donc bien : $a - b = a + (-b)$

2.4 Enoncé du théorème

On vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème :

Pour tous nombres *a* et *b*, on a :

$$a - b = a + (-b)$$

Autrement dit :

La différence du nombre *a* et du nombre *b* est égale à la somme de *a* et de l'opposé de *b*

2.4 Application au calcul de la différence de deux nombres relatifs :

Calculs	***Commentaires***
A = (-6) – (-9) *A = (-6) + (+9)* *A = (+3)*	*On applique le théorème. Ce qui permet de transformer le calcul de la différence en un calcul de somme* *On utilise alors la définition relative au calcul d'une somme (chapitre 1).*
B = (+6) – (-8) *B = (+6) + (+8)* *B = (+14)*	*Idem*
C = (-3) – (-12) + (-4) – (-6) + (+12) *C = (-3) + (+12) + (-4) + (+6) + (+12)* *C = (-3) + (-4) + (+12) + (+6) + (+12)* *C = (-7) + (+30)* *C = (+23)*	*On applique le théorème. Ce qui permet de transformer le calcul des différences en des calculs de sommes.* *On est alors ramené au calcul de la somme de plusieurs nombres relatifs (chapitre 1).*

3. Simplifications d'écriture

<u>Conventions d'écriture :</u>

Dans une suite <u>d'additions</u>, on peut supprimer les signes d'addition et les parenthèses qui « entourent » le nombre.

Un nombre positif en début de calcul peut s'écrire sans signe

Exemples

Ecritures avec parenthèses	*Ecritures simplifiées*
(-5) + (+7) + (-3)	*-5 + 7 – 3*
(+5) + (-7) + (+9)	*5 – 7 + 9*

Méthode :

Pour donner l'écriture simplifiée d'une expression, on commence par transformer tous les calculs de différence en calculs de sommes (on applique le théorème) puis on applique les conventions d'écritures énoncées ci-dessus.

Exemple :

Calculs	Commentaires
A = (-5) - (-6) – (+5)	On commence par transformer les calculs de sommes en calculs de différences.
A = (-5) + (+6) + (-5)	Pour cela, on applique le théorème.
A = -5 + 6 – 5	On applique ensuite les conventions d'écriture énoncées ci-dessus.

Méthode :

Pour retrouver une écriture avec parenthèses d'une expression quand on en a une écriture simplifiée, il suffit de remettre les parenthèses et les symboles d'addition.

Exemple :

B = -4 + 7 – 34 + 6

B = (-4) + (+7) + (-34) + (+6)

Chapitre 26 : Proportionnalité 5 : Echelle

Exercice

Une voiture est représentée par une maquette à l'échelle $\frac{1}{20}$.

1. La longueur de cette maquette est de 18 cm. Quelle est la longueur réelle de cette voiture ?

2. La longueur d'une voiture est de 4,2 m. Quelle sera la longueur de sa maquette à l'échelle $\frac{1}{20}$?

Cela signifie que les dimensions de la maquette et les dimensions de la voiture dans la réalité sont proportionnelles et qu'un coefficient de proportionnalité est $\frac{1}{20}$.

En particulier, le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

Dimensions sur la maquette (en *cm*)	1	18	
Dimensions réelles (en *cm)*	20		420

Définition

Lorsque les dimensions du dessin (ou de la maquette) d'un objet et les dimensions réelles de cet objet <u>sont proportionnelles</u>, on appelle <u>échelle</u> (notée *e*) le quotient d'une longueur sur le dessin (ou la maquette) par la longueur réelle correspondante exprimée <u>avec la même unité</u>.

$$e = \frac{\text{longueur sur dessin}}{\text{longueur correspondante dans la réalité}}$$

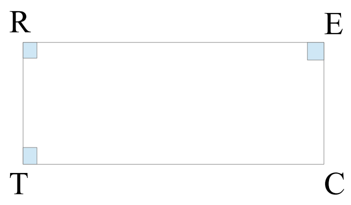
Remarque : l'échelle est un coefficient de proportionnalité.

Chapitre 27 : Parallélogrammes particuliers

1. Rectangle

1.1 Définition

Définition : Un rectangle est un quadrilatère qui a trois angles droits.



Données :

RECT est un quadrilatère.

$\widehat{TRE}=\widehat{REC}=\widehat{CTR}=90\,°$

RECT est un rectangle par définition.

On rappelle la propriété suivante :

Propriété : Si un quadrilatère est un rectangle alors il a quatre angles droits.

1.2 Propriétés du rectangle

On rappelle la propriété suivante :

Propriété : Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété : Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un parallélogramme.

On en déduit les propriétés suivantes :

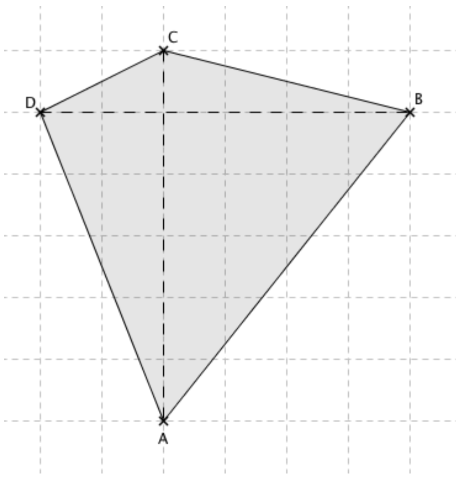
Propriété :

- **Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.**
- **Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont le même milieu.**

On admet la propriété suivante :

Propriété : Si un quadrilatère est un rectangle alors il a ses diagonales de même longueur.

Attention : la réciproque est fausse.



1.3 Propriétés caractéristiques

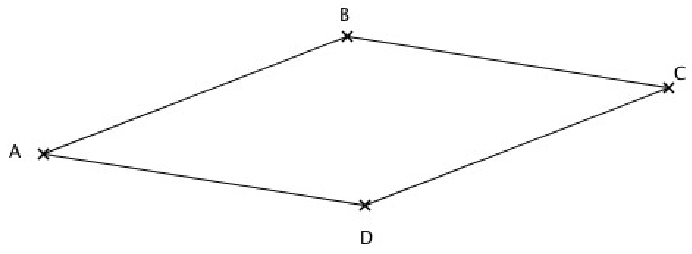
On admet les propriétés suivantes :

Propriétés :

- **Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.**
- **Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.**

2. Losange.

2.1 Définition



Définition : Un losange est un quadrilatère tous ses cotés de même longueur.

2.2 Propriétés

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Si un quadrilatère est un losange alors il est convexe.

Question : Un losange est-il un parallélogramme ?

Hypothèse : ABCD est un losange.

On sait que :

- ABCD est un losange donc AB = DC et BC = AD.
- ABCD est un losange donc ABCD est convexe.

Propriété : Si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés de même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.

Conclusion : ABCD est un parallélogramme.

On vient de démontre la propriété suivante :

Propriété : Si un quadrilatère est un losange, alors c'est un parallélogramme.

On en déduit les propriétés suivantes :

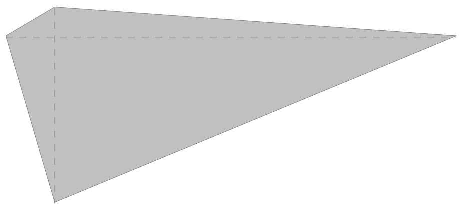
Propriété :

- **Si un quadrilatère est un losange alors ses côtés opposés ont des supports parallèles deux à deux.**
- **Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales se coupent en leur milieu.**

On rappelle la propriété suivante ($6^{ème}$) :

Propriété : Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Attention : La réciproque de cette propriété est fausse :



2.3 Propriétés caractéristiques

On admet les propriétés suivantes :

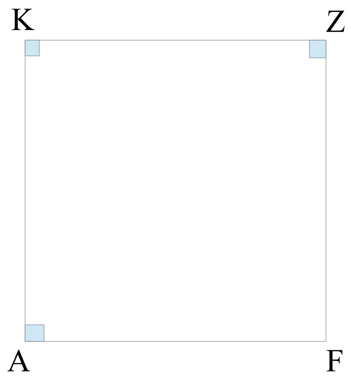
Propriété :

- **Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.**
- **Si un parallélogramme a ses diagonales qui sont perpendiculaires alors c'est un losange.**

3. Carré

3.1 Définition

Définition : Un carré est un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur.



Données :

- KZFA est un rectangle
- KZ = ZF.

KZFA est un carré par définition.

3.2 Propriétés

Hypothèse : KZFA un rectangle avec KZ = ZF.

On sait que : KZFA est un rectangle.

Propriété : Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés ont la même longueur deux à deux.

Conclusion : KA = ZF et KZ = AF.

Comme de plus KZ = ZF par hypothèse, on en déduit que :

KZ = ZF = FA = AK

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété : Un carré a tous ses côtés de même longueur.

Remarque : Un carré est à la fois un rectangle (définition) et un losange car il a ses quatre côtés de même longueur

On en déduit la propriété suivante :

<u>Propriété</u> : Si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.

3.3 Propriété caractéristique

On admet la propriété suivante :

<u>Propriété :</u>

Si un losange est aussi un rectangle alors c’est un carré.

Chapitre 28 : Angles dans un triangle.
Aire du triangle.

1. Conjecture

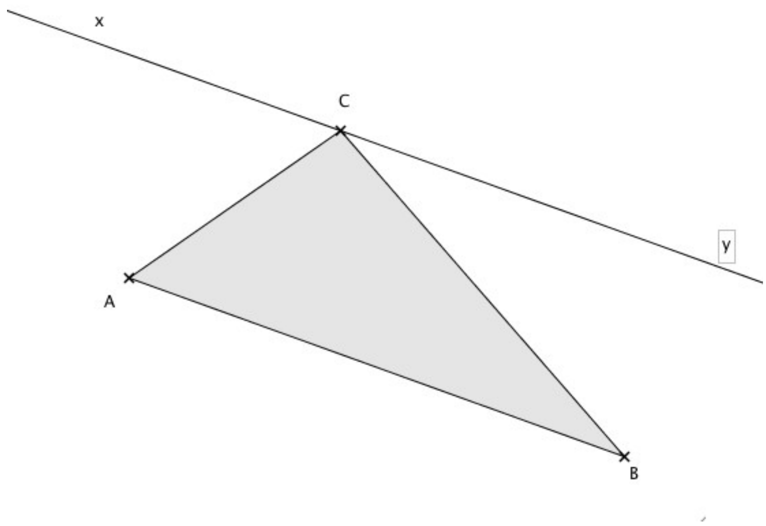
A l'aide de géogébra, on a formulé la conjecture suivante :

Il semble que :

Dans un triangle, la somme des mesures des angles en degré soit égale à 180.

2. Démonstration

Hypothèse : ABC est un triangle.



On appelle (xy), la droite parallèle à (AB) passant par C.

On sait que : $\widehat{BAC}$ et $x\widehat{CA}$ sont en position d'angles alterne-internes par rapport à la droite (AC) sécante aux droites (xy) et (AB) qui sont parallèles.

Théorème : Si deux angles sont en position d'angles alternes-internes par rapport à une droite sécantes à deux droites parallèles alors ils sont égaux.

Conclusion : $\widehat{BAC} = x\widehat{CA}$.

De le même façon, on démontrerait que :

$$\widehat{ABC} = y\widehat{CB}$$

De plus $x\widehat{CA} + \widehat{ACB} + y\widehat{CB} = 180$

On en déduit que : $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180$

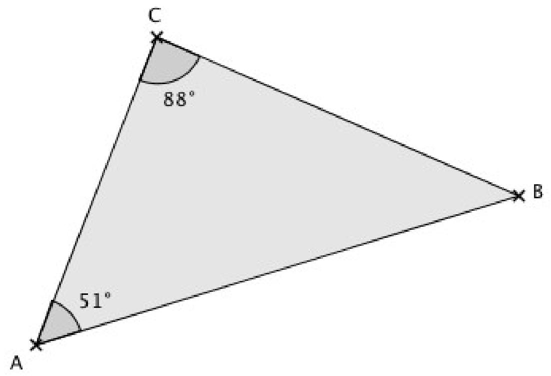
3. Enonce du théorème

On vient de démontrr le théorème suivant :

Théorème:

Dans un triangle, la somme des mesures des angles en degrés est égale à 180.

4. Exemple



Données : ABC est un triangle tel que : $\widehat{BAC}$ = 51° et $\widehat{ACB}$ = 88°

Calculer la mesure de $\widehat{ABC}$.

Dans un triangle la somme des mesures des angles en degré est égale à 180.

Donc : $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180$

Donc : $\widehat{ABC} + 51 + 88 = 180$

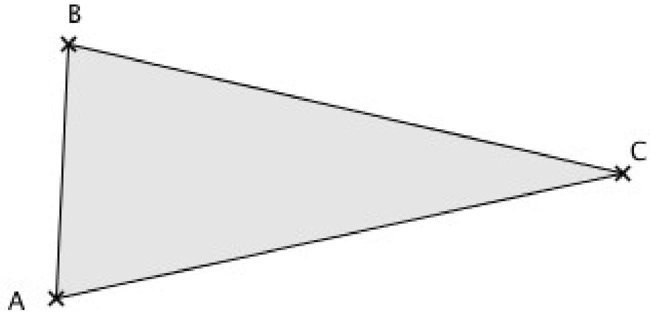
Donc : $\widehat{ABC} + 139 = 180$

Donc : $\widehat{ABC} = 180 - 139 = 41$

Conclusion : $\widehat{ABC}$ mesure 41°.

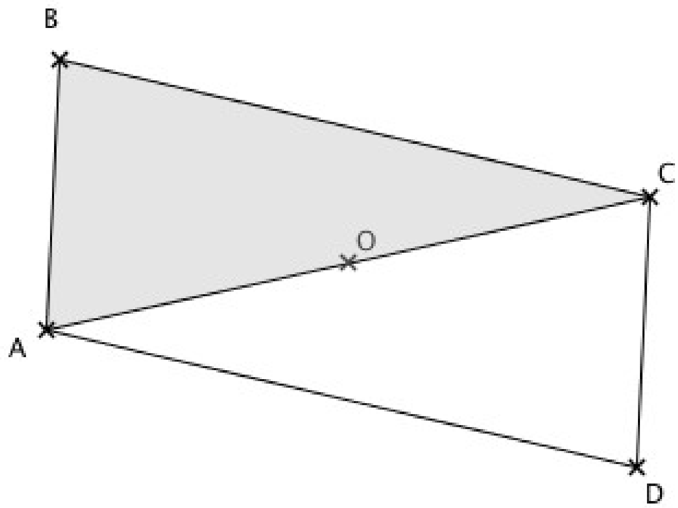
5. Aire d'un triangle

Donnée : ABC est un triangle.



Objectif : calculer l'aire de ABC.

Idée : On essaye de se ramener au calcul de l'aire d'un parallélogramme :



1. On appelle O le milieu de [AC].
D est le symétrique de B par rapport à O.

Le quadrilatère ABCD est convexe et il admet O pour centre de symétrie, c'est donc un parallélogramme.

2. On démontre que : l'aire de ABC est égale à la moitié de celle de ABCD.

On sait que : C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

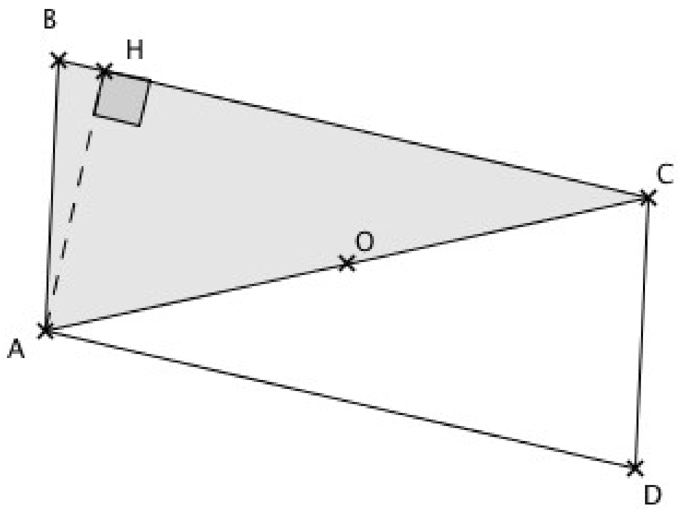
Propriété : Une symétrie centrale transforme une figure en une figure de même aire.

Conclusion : ABC et ACD ont la même aire.

On en déduit que l'aire de ABC est égale à la moitié de celle de ABCD.

3. On calcule l'aire de ABC :

On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



On a :

$$A_{ABC} = \frac{A_{ABCD}}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$$

On vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème :

Soit ABC un triangle.

On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

On a :

$$A_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$

Où A_{ABC} est l'aire du triangle ABC.

Chapitre 29 : Opérations sur les nombres en écritures fractionnaires

1. Calcul du produit de deux nombres en écriture fractionnaire

On admet le théorème suivant :

Théorème :

Pour tous nombres positifs *a, b, c* et *d* avec *c* et *d* tous les deux non nuls, on a :

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

2. Calcul de la somme de deux nombres en écriture fractionnaire

On admet le théorème suivant :

Théorème :

Pour tous nombres positifs *a, b et c* avec *c* non nul, on a :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$