

Chapitre 17 : Réciproque du théorème de Pythagore.

1. Réciproque du théorème de Pythagore

1.1 Préliminaires

On admet la propriété suivante :

Propriété 1 :

Soient x et y deux nombres

- si $x^2 = y^2$ alors $x = y$ ou $x = -y$.
- Réciproquement, si $x = y$ ou $x = -y$ alors $x^2 = y^2$

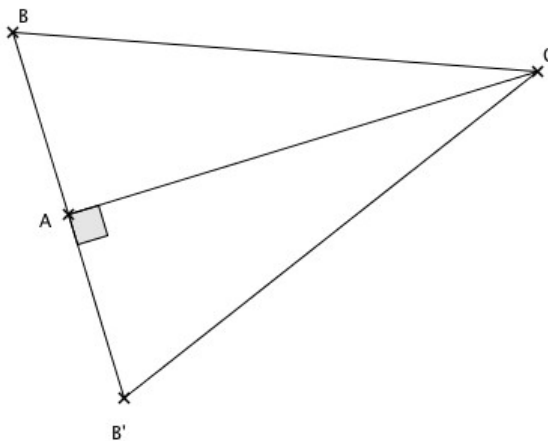
On admet la propriété suivante :

Propriété 2 :

Si deux triangles sont isométriques (ils ont leurs côtés de même longueur) alors leurs angles sont égaux.

Remarque : la réciproque de cette propriété est fausse. On l'étudiera ultérieurement.

1.2 Démonstration



Hypothèses :

- ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Soit B' un point de la droite perpendiculaire à (AC) passant par A tel que : $BA' = BA$.

Le triangle BAC étant rectangle en A, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$B'C^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2$$

BC et B'C' étant des nombres positifs, on en déduit que $BC = B'C'$ (propriété 1).

Ainsi, les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques, on en déduit que leurs angles sont égaux (propriété 2) et par suite que le triangle ABC est rectangle.

1.3 Enoncé du théorème

On vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Réciproque du théorème de Pythagore :

Si dans un triangle, le carré de la mesure d'une côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

2. Démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

Le triangle ABC défini par : $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 4,2 \text{ cm}$ et $AC = 5,6 \text{ cm}$ est-il rectangle ?

Rédaction :

$$\begin{array}{lll} AB^2 = 7^2 & \text{et} & BC^2 + AC^2 = 4,2^2 + 5,6^2 \quad \text{On effectue les deux calculs séparément.} \\ \text{soit } AB^2 = 49 & \text{et} & BC^2 + AC^2 = 49 \end{array}$$

On sait que : $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 49$ d'après les calculs précédents.

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en C.

3. Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Le triangle DEF défini par : $DE = 10,5 \text{ cm}$, $DF = 8,4 \text{ cm}$ et $EF = 6,2 \text{ cm}$ est-il rectangle ?

Rédaction :

[DE] est le côté le plus long, donc si DEF est rectangle, il l'est en F.

$DE^2 = 10,5^2$ et $FE^2 + FD^2 = 6,2^2 + 8,4^2$ **On effectue les deux calculs séparément.**
soit $DE^2 = 110,25$ et $FE^2 + FD^2 = 109$

Raisonnons par l'absurde :

Supposons que le triangle DEF soit rectangle en F.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $DE^2 = FE^2 + FD^2$

Et donc $110,25 = 109$.

Ce qui est absurde.

Conclusion : Le triangle DEF n'est pas rectangle en F et par suite, il n'est pas rectangle.

Exercices chapitre 17

Exercice 17.1

SABC est un tétraèdre tel que : $BC = 5$ cm, $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $SA = 6$ cm et (SA) est perpendiculaire à la face ABC.

Dessiner un patron de SABC.

L'aire de SBC est environ égale à $21,7$ cm² par arrondi au dixième.

Calculer l'aire du patron de SABC.