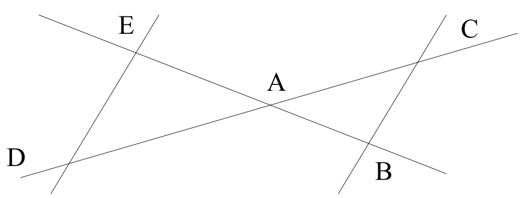
Chapitre 1 : Théorème de Thalès.

1. Théorème de Thalès.

1.1. Conjecture



Hypothèses :

a. Les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

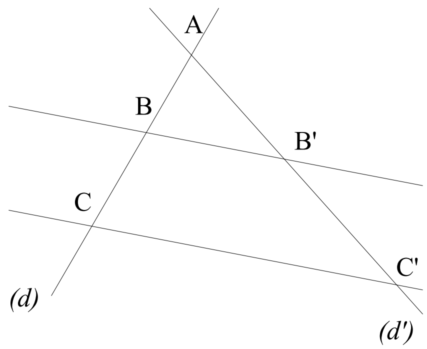
b. Les droites (CD) et (BE) sont sécantes en A.

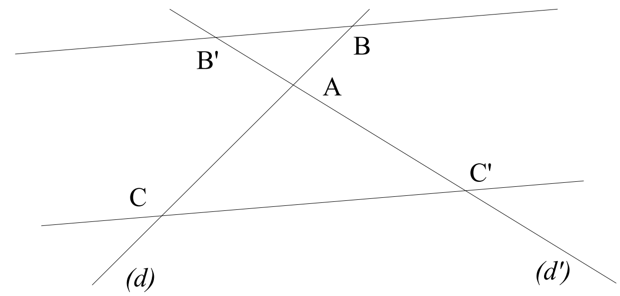
Dans l'exercice n°2.1, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture : il semble qu'avec les hypothèses ci-dessus, on ait : $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DE}$

1.2. Enoncé des théorèmes

Dans l'exercice 2.2, on a démontré partiellement les deux propriétés suivantes :





<u>Théorème 1 : Théorème de Thalès :</u>

Soient *(d)* et *(d')* deux droites sécantes en A.

Soient B et C deux points de *(d)* distincts de A.

Soient B' et C' deux points de *(d')* distincts de A.

<u>Si</u> les droites (BB') et (CC') sont <u>parallèles</u>, <u>alors</u> $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

<u>Théorème 2 :</u>

Soient *(d)* et *(d')* deux droites sécantes en A.

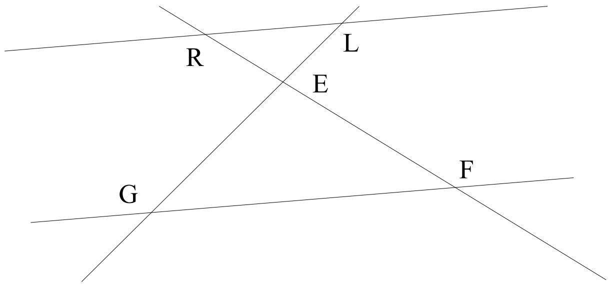
Soient B et C deux points de *(d)* distincts de A.

Soient B' et C' deux points de *(d')* distincts de A.

<u>Si</u> les droites (BB') et (CC') sont <u>parallèles</u>, <u>alors</u> $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$

Remarque : Dans la pratique, on utilise surtout le théorème n°2 que l'on appelle abusivement théorème de Thalès.

2. Utilisation du théorème de Thalès pour calculer des longueurs



Données :

- Les droites (RF) et (LG) sont sécantes en E.
- Les droites (LR) et (FG) sont parallèles.
- ER = 7 cm ; EF = 14 cm ; EL = 3 cm et FG = 20 cm

Question : **Calculer les longueurs LR et EG.**

On sait que

- Les droites (LG) et (FR) sont sécantes en E.
- Les droites (LR) et (FG) sont parallèles.

***D'après* le théorème de Thalès, on a :**

$$\frac{ER}{EF}=\frac{EL}{EG}=\frac{RL}{FG} \quad \textbf{soit} \quad \frac{7}{14}=\frac{3}{EG}=\frac{RL}{20}$$

On en déduit que :

$$EG=\frac{3\times 14}{7}=\frac{3\times 7\times 2}{7\times 1}=6 \quad \text{et} \quad LR=\frac{20\times 7}{14}=\frac{2\times 10\times 7}{7\times 2}=10$$

Conclsuion : ***EG et LR sont respectivement égales à 6 cm et 10 cm.***

Chapitre 2 : Arithmétique 1.

1. Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1.1 Définitions

On a 13 416 = 258×52

On dit alors que : 258 (52) est **un diviseur** de 13 416 ou 13 416 est **un multiple** de 52 (258) ou 13 416 est **divisible par** 258 (52) .

Définition:

Un nombre entier *b* est un diviseur du nombre entier *a* signifie qu' il existe un nombre entier *c* tel que : $a = b \times c$.
Dans ce cas, on dit aussi que *a* est divisible par *b* ou que *a* est un multiple de *b*.

Exercice : Trouver tous les diviseurs de 72.

$72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$

Les diviseurs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 et 72.

Remarque : il faut utiliser les critères de divisibilité.

1.2Propriétés

Dans l'exercice 1.2, on a démontré la propriété suivante :

Propriété

Un diviseur commun de deux nombres entiers est aussi un diviseur de leur somme et de leur différence (on soustrait le plus petit des deux nombres au plus grand)

2. Le plus grand diviseur commun de deux nombres

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Pour tous nombres entiers *a* et *b*, il existe un plus grand diviseur commun.

Définition:

***a* et *b* étant deux nombres entiers. Le plus grand diviseur commun de *a* et *b* est appelé le PGCD de ces nombres et on le note PGCD(*a* ; *b*).**

Exemple

1. Trouver le PGCD de 70 et 98.

2. En déduire la simplification de la fraction $\frac{70}{98}$ en une seule étape.

3. Nombres premiers entre eux

Définition : Deux nombres entiers a et b sont premiers entre eux signifie que leur PGCD est égal à 1.

Remarque : Si deux nombres entiers sont premiers entre eux, alors leur seul diviseur commun est 1 et réciproquement.

Exemple: Montrer que les nombres 1968 et 1789 sont premiers entre eux.

4. Fraction irréductible

Les nombres 1968 et 1789 sont premiers entre eux.

La fraction $\frac{1968}{1789}$ ne peut donc pas être simplifiée.

Définition : Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Remarque : Une fraction irréductible est une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

On admet la propriété suivante :

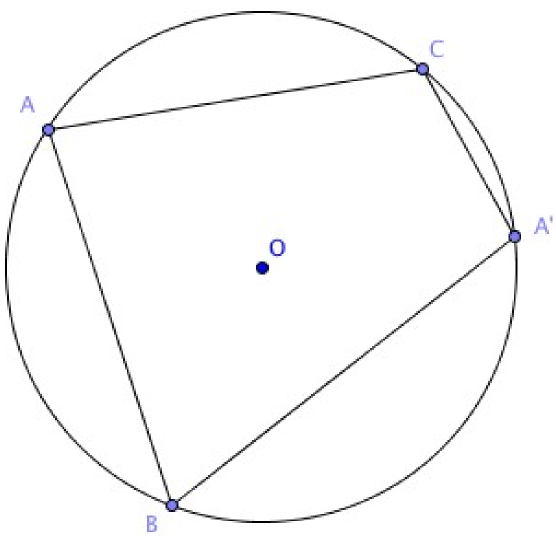
<u>Propriété :</u>

Soient *a* et *b* deux nombres entiers avec *b* non nul.

Si on simplifie la fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD de *a* et *b*, on otient une fraction irréductible.

Chapitre 3 : Angles inscrits et au centre.

1. Définitions



Données :

Les points A, B, C et A' appartiennent au même cercle (C) de centre O. (On dit qu'ils sont cocycliques).

Définition :

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle et dont les côtés coupent le cercle en des points distincts du sommet.

Exemples : $\widehat{BA'C}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C).

Définition :

Soient A, B et C trois points d'un même cercle (C).

On appelle arc de cercle intercepté par l'angle inscrit l'arc de cercle d'extrémités B et C qui ne contient pas A.

Exemples : $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc BC (en rouge). $\widehat{BA'C}$ intercepte l'arc BC (en bleu).

Définition : Un angle dont le sommet est le centre d'un cercle est appelé angle au centre de ce cercle.

2. Théorèmes

2.1 Angle inscrit et angle au centre interceptant un même arc de cercle.

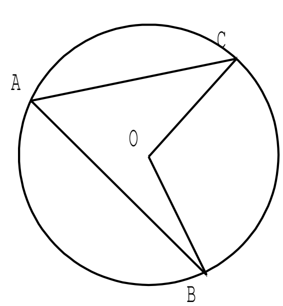


Figure 1

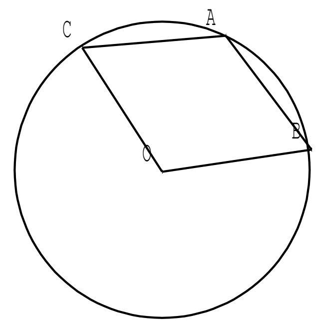


Figure 2

Données :
L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc BC .

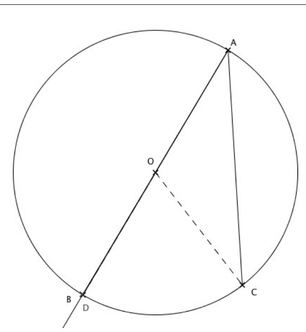
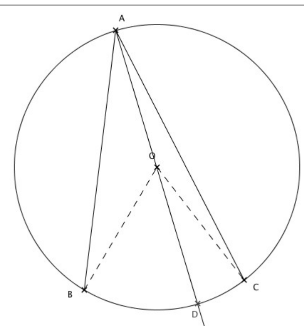
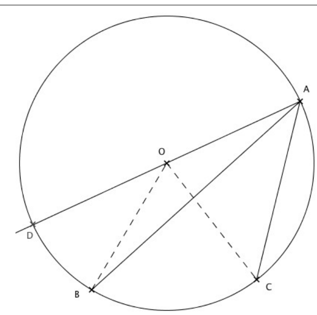
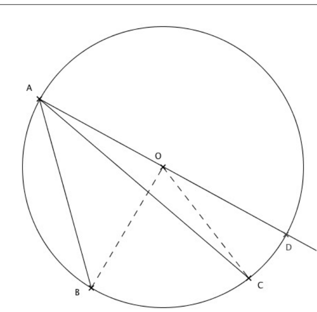
Données :
L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre BOC interceptent le même arc BC .

Hypothèse : B, A, C sont trois points d'un cercle de centre O tels que : $\widehat{BAC}$ intercepte le même arc que l'angle saillant $\widehat{BOC}$.

Remarque : Avec ces hypothèses, $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit, $\widehat{BOC}$, un angle au centre et ils interceptent tous les deux un arc de cercle de longueur inférieur ou égale à un demi-cercle.

On appelle D le deuxième point d'intersection de [AO) avec le cercle (le premier étant A).

Quatre cas peuvent se produire :

Cas 1 : Le point D est confondu avec C	**Cas 2 :** Les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DAB}$ sont adjacents	**Cas 3 :** Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BAC}$ sont adjacents	**Cas 4 :** Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents
			

<u>Premier cas</u> : D est confondu avec B

On a un cercle de centre O et A, B, et C trois ponts distincts du cercle.

On étudie le triangle BAO : c'est un triangle isocèle car A et B sont deux points distincts appartenant au cercle C de centre O,

On en déduit que : $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$.

On nomme les angles du triangle BAO :

$\widehat{BAO} = x$

$\widehat{AOB} = y$

$\widehat{BOC} = z$

On utilise la propriété : La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

On peut écrire que dans le triangle ABO :

$\widehat{BAO} + \widehat{ABO} + \widehat{AOB} = 180$

$\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = x$ et $\widehat{AOB} = y$

Donc $2x + y = 180$

$y = 180 - 2x$

A, B, et C étant trois ponts distincts et alignés du cercle de centre O, $\widehat{AOC}$ est un angle plat donc $\widehat{AOC} = 180$

$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180$ ($\widehat{AOB} = y$ et $\widehat{BOC} = z$)

$y + z = 180$

$z = 180 - y$ avec $y = 180 - 2x$

$z = 180 - (180 - 2x)$ en remplaçant y par $180 - 2x$

$z = 180 - 180 + 2x$

$z = 2x$ avec $\widehat{BAO} = x$

donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAO}$

<u>Notre conjecture est donc démontrée dans ce premier cas.</u>

<u>Deuxième cas</u> *: $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DAB}$ sont adjacents*

Notations : $\widehat{CAO} = z$; $\widehat{BAD} = y$

On a alors : $\widehat{BAC} = z + y$ *car* $\widehat{BAC} = \widehat{CAO} + \widehat{BAO}$

On utilise le résultat démontré dans le 1er cas :

$\widehat{COD} = 2 \times \widehat{CAO} = 2z$ *et* $\widehat{BOD} = 2 \times \widehat{BAD} = 2y$

De plus $\widehat{BOC} = \widehat{COD} + \widehat{BOD}$

Donc $\widehat{BOC} = 2z + 2y$

Donc $\widehat{BOC} = 2(z + y)$ *avec* $\widehat{BAC} = z + y$

Donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$

<u>Notre conjecture est donc démontrée dans le deuxième cas.</u>

<u>Troisième cas :</u> *$\widehat{BAD}$ et $\widehat{BAC}$ sont adjacents*

Notations : $\widehat{CAO} = z$; $\widehat{BAD} = y$
On a alors $\widehat{BAC} = z - y$

On utilise le résultat démontré dans le 1er cas :

$\widehat{COD} = 2 \times \widehat{CAO} = 2z$ *et* $\widehat{BOD} = 2 \times \widehat{BAD} = 2y$

De plus $\widehat{BOC} = \widehat{COD} - \widehat{BOD}$

Donc $\widehat{BOC} = 2z - 2y$

Donc $\widehat{BOC} = 2(z - y)$ *avec* $\widehat{BAC} = z - y$

Donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$

<u>Notre conjecture est donc démontrée dans le troisième cas.</u>

Quatrième cas : Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents
On procède comme dans le quatrième cas.

Remarques:

- La démonstration ci-dessus est **une démonstration par disjonction des cas.**
- On admet que si l'angle $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc d'extrémités B et C, intercepté par l'angle rentrant BOC, le résultat reste vrai.

Théorème :

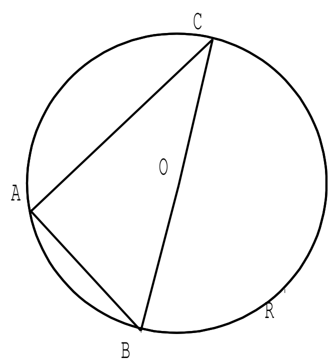
Si dans un cercle, une angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

Exemples :

Figure 1 : L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc, on a donc : $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$

Figure 2 : L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre BOC interceptent le même arc, on a donc : BOC = 2 × $\widehat{BAC}$

Cas particulier :



Données :

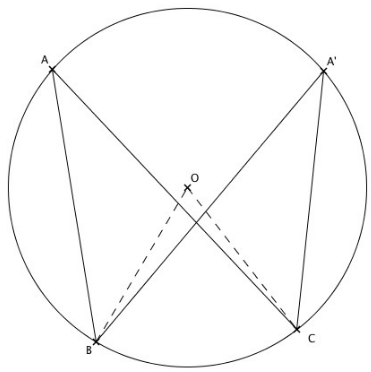
A appartient au cercle de diamètre [BC] et de centre O.

Si [BC] est un diamètre du cercle, alors l'angle au centre mesure 180°.
On déduit alors de la propriété précédente que l'angle inscrit mesure 90°.
Donc le triangle ABC est rectangle en A

On redémontre ainsi le théorème vue en quatrième :

Théorème : Si le cercle circonscrit à un triangle à pour diamètre un des côtés du triangle alors ce triangle est rectangle

2.1 Angles inscrits interceptant le même arc.



Données :

Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ interceptent le même arc dans un cercle de centre O.

L'angle inscrit et l'angle au centre interceptent le même arc, on a donc : $\widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$

De la même façon, on montre que : $\widehat{BA'C} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$

On en déduit que : $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété : Si dans un cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Chapitre 4 : Introduction à la notion de fonctions.

Synthèse exercice 4.1

Pour un nombre positif $\boldsymbol{x}$ donné, on note $f(x)$, le nombre obtenu par le programme de calcul.

Pour tout nombre x, on a : $f(x) = 5(-2x + 5) = -10x + 25$

On définit ainsi un processus calculatoire qui à un nombre x associe le nombre $-10x + 25$.

Ce processus calculatoire qui consiste à associer à tout nombre positif $\boldsymbol{x}$, le nombre $-10x + 25$ est appelé une fonction.

On a donc défini la fonction f qui à un nombre x associe le nombre $-10x + 25$

Le mode de fonctionnement de cette fonction est noté de la façon suivante :

- $f : x \mapsto -10x + 25$ (qui se lit « f est la fonction qui au nombre x associe le nombre $-10x + 25$)
- *Ou :* Pour tout nombre x, $f(x) = -10x + 25$

On a le tableau suivant :

x	2	3
$f(x)$	5	-5

Vocabulaires :

- Le tableau ci-dessus est un **tableaux de valeurs** de la fonction f.
- 5 est **l'image** de 2 par la fonction f, -5 est **l'image** de 3 par la fonction f.
- 2 est **un antécédent** de 5 par la fonction f.
- 3 est **un antécédent** de -5 par la fonction f.

Plus généralement, on donne les définitions suivantes :

<u>Définitions :</u> Soient *f* une fonction, *x* et *y* deux nombres tels que : $f(x) = y$.

Dans ce cas là, on dit que :

- ***y* est <u>l'image</u> de *x* par *f*.**
- ***x* est <u>un antécédent</u> de *y* par *f*.**

<u>Remarques :</u>

- Si un nombre a une image par une fonction *f*, alors celle-ci est unique.
- Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents par une fonction,
  Par exemple si on définit la fonction *f* par :

  Pour tout nombre x, $f(x) = x^2$

  Alors 9 a deux antécédents par *f* : 3 et -3
  Par contre, -1 n'a pas d'antécédent par *f* car l'image de tout nombre par *f* est positif.

Chapitre 5 : Statistiques 1.

1. Médiane d'un série statistique

Définition :

Soit S une série statistique dont l'effectif total est n.

- **Si n est impair alors <u>la médiane</u> de la série S est la $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{ème}$ valeur de la série ordonnée dans l'ordre croissant.**
- **Si n est pair alors <u>la médiane</u> de la série S est la moyenne de la $\left(\frac{n}{2}\right)^{ème}$ et de la $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{ème}$ valeur de la série ordonnée dans l'ordre croissant.**

Remarque :

La médiane m d'une série est un nombre m qui partage le groupe étudié en deux sous-groupes <u>de même effectif</u> tels que :

- Tous les éléments du premier sous groupe ont des valeurs inférieures ou égales à m.
- Tous les éléments du second sous-groupe ont des valeurs supérieures ou égales à m.

Exemple 1 :

Voici 15 notes obtenues en une année par un élève :
13 – 5 – 4 – 12 – 17 – 18 – 14 – 3 – 15 – 7 – 5 – 16 – 15 – 14 – 13

1. Déterminer une médiane de cette série statistique.
2. Calculer la moyenne de cette série statistique.

Exemple 2 :

Donner une médiane de la série suivante : 45 – 3 – 40 – 69 – 90 – 21 – 9 – 71 ?

Remarques:

- Plusieurs nombres peuvent être une médiane d'une série donnée.
- Une médiane n'est pas nécessairement une valeur de la série.

2. Etendue d'une série statistique.

<u>Définition :</u>

L'étendue d'une série statistique est égale à la différence de la plus grande et de la plus petite valeur prises par cette série.

Remarque : L'étendue d'une série mesure la « dispersion » de cette série.

Exemples : Déterminer l'étendue des séries des exemples 1 et 2 du paragraphe 1.

Chapitre 6. Identités remarquables

Soient a et b deux nombres

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De même, on a :

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Et :

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

On vient de démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème :</u>

Pour tous nombres *a* et *b*, on a :

Développement

$\longrightarrow$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$\longleftarrow$

Factorisation

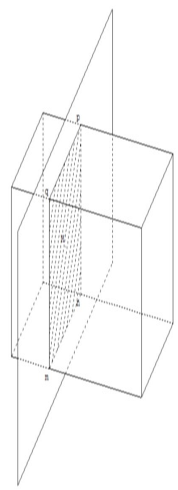
Remarques :

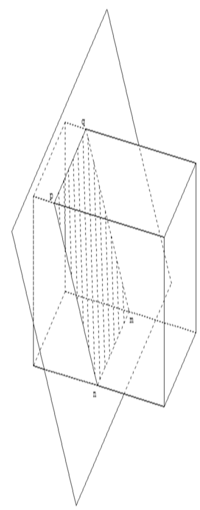
- Ces trois formules sont **<u>des identités remarquables</u>.**

Chapitre 7 : Espace 1. Sections planes

Toutes les propriétés énoncées dans ce chapitre sont admises.

1. Section d'un pavé par un plan :



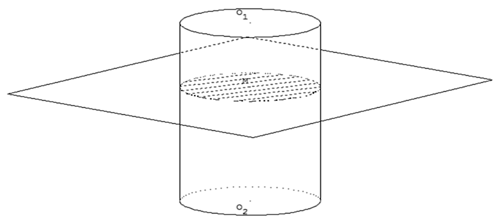


Propriété :

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ou par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

2 Section d'un cylindre par un plan

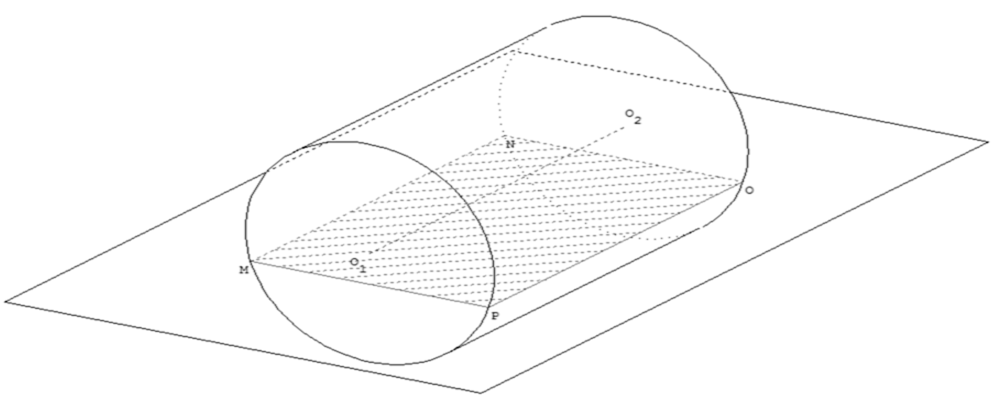
2.1 Plan parallèle à la base



Propriété :

La section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est un cercle dont le centre appartient à l'axe du cylindre.

2.2 Plan parallèle à l'axe



Propriété :

La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe du cylindre est un rectangle.

Chapitre 8 : Racines carrées 1

1. Racine carrée d'un nombre positif

1.1 Préliminaire

Soit a un nombre, alors : $a^2 = a \times a$ est le produit de deux nombres de même signe, c'est donc un nombre positif.

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété 1 : Le carré d'un nombre réel est positif.

On admet la propriété suivante :

Propriété 1 : Pour tout nombre strictement positif *a*, il existe deux nombres opposés l'un de l'autre dont le carré est *a*.

Exemple : $16 = 4^2 = (-4)^2$; $\frac{16}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2$

Remarque : Le seul nombre dont le carré soit égal à 0 est 0.

1.2 Définition

Définition :

Soit a un nombre positif,

On appelle racine carrée de *a* le nombre positif dont le carré est *a*.

On le note : $\sqrt{a}$.

Autrement dit : a est l'unique nombre tel que : $\sqrt{a} \geqslant 0 \ et \ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Exemples : $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{0{,}09} = 0{,}03$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

Vocabulaire : $\sqrt{}$ est appelé le **radical**.

Remarques :

Avec la calculatrice, on obtient : $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ par arrondi au millième.
Mais 1,414 n'est qu'une valeur approchée décimale de $\sqrt{2}$.
En effet, on peut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, on peut même démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

2. Equations du type « $x^2=a$ »

2.2 Etude de l'équation « $x^2 = a$ »

Soit a un nombre, on désire résoudre l'équation $x^2 = a$.

Premier cas : *a* est strictement négatif.
Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, on en déduit que l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Deuxième cas : *a* est strictement positif.
D'après la propriété 1 bis, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions $\sqrt{a}$ *et* $-\sqrt{a}$.

Troisième cas : *a* = 0.
Le seul nombre dont le carré soit 0 est 0.

2.3 Enoncé du théorème

On vient de démontrer partiellement le théorème suivant :

Théorème 1 :

Soit a un nombre.

Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une unique solution : 0.

Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

2.4 Exemples de résolution

Résoudre l'équation $x^2 = -3$.

Le carré d'un nombre est toujours positif donc cette équation n'a pas de solution.

Remarque : Ici on n'a pas appliqué le théorème mais « refait » la démonstration du cas a strictement négatif.

Résoudre l'équation $x^2 = 5$

5 est un nombre strictement positif donc l'équation $x^2 = 5$ a deux solutions $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

3. Etude de $\sqrt{a^2}$

Si a est positif, a est le nombre positif dont le carré est a^2, d'après la définition, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

Si a est négatif, alors $-a$ (l'opposé de a) est le nombre positif dont la carré est a^2, d'après la définition , on a : $\sqrt{a^2} = -a$

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété 2 :

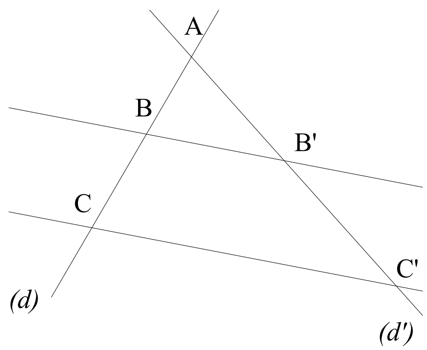
Pour tout nombre positif a, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

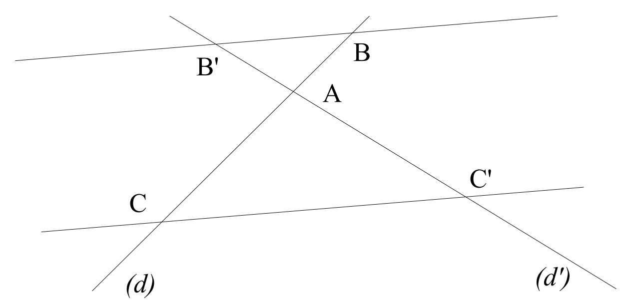
Pour tout nombre négatif a, on a : $\sqrt{a^2} = -a$.

Chapitre 9 : Réciproque du théorème de Thalès

1.1Réciproque du théorème de Thalès

1.1. Enoncé du théorème





On admet le théorème suivant :

<u>Théorème : réciproque du théorème de Thalès :</u>

Soient *(d)* et *(d')* deux droites sécantes en A.

Soient B et C deux points de *(d)* distincts de A.

Soient B' et C' deux points de *(d')* distincts de A.

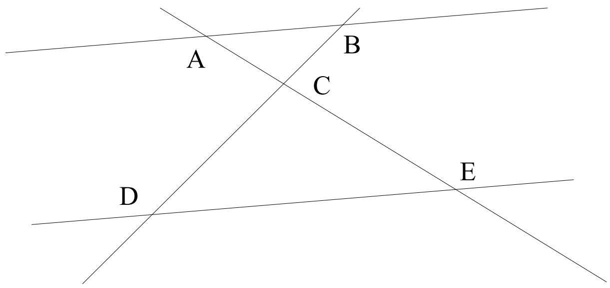
Si
1. $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB'}{AC'}$
2. Les points A, C, C d'une part et A, B', C' d'autre part sont alignés dans le même ordre.

<u>alors</u> les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

Remarques :

- Dans la pratique, l'alignement des points est parfois lu sur le dessin.
- La condition sur la position des points qui n'est pas nécessaire pour le théorème direct, explique que l'on ne devrait pas parler en toute rigueur de réciproque de la propriété de Thalès, néanmoins nous nous conformerons à l'usage. (Voir exercice).
- Il est cependant possible d'énoncé la propriété de Thalès de telle sorte que sa réciproque soit vraie. Mais cette formulation n'est pas au programme.

2. Utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour démontrer que deux droites sont parallèles.



Données :

- Toutes les mesures de longueur sont exprimées en *cm*.
- Les points A, C, E d'une part et B, C, D d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- AC = 3 cm, CE = 7 cm , BC = 1,5 cm et CD = 3, 5 cm.

Question : les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles?

$\frac{CA}{CE}=\frac{3}{7}$ **et** $\frac{CB}{CD}=\frac{1,5}{3,5}=\frac{1,5\times 2}{3,5\times 2}=\frac{3}{7}$

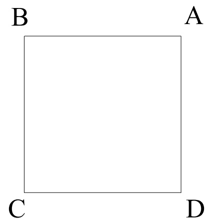
On sait que :

- $\frac{CB}{CD}=\frac{CA}{CE}=\frac{3}{7}$
- **Les points A, C et E d'une part et B, C et D d'autre part sont alignés dans le même ordre.**

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Chapitre 10 : Représentation graphique des fonctions. Equations « produit nul ».

Dans toute la suite, ***x*** désigne un nombre positif.



Donnée :

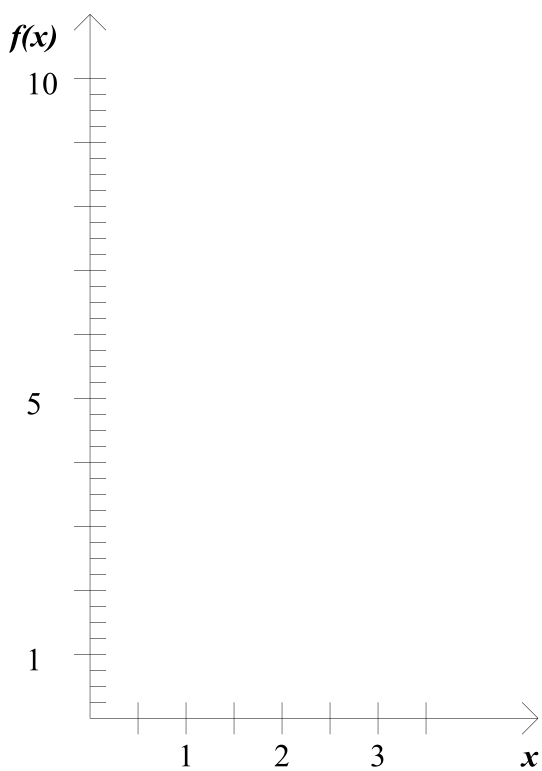
- ABCD est un carré dont les côtés mesurent ***x*** cm.

Pour un nombre positif ***x*** donné, on note $f(x)$ l'aire du carré.

Pour tout nombre positif x, on a : $f(x) = x^2$

On a le tableau de valeurs suivants :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Définition :

La représentation graphique d'une fonction f dans un repère ce sont tous les points qui ont pour coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.

Remarque : cette définition signifie que :

1. Si x est un nombre alors le point de coordonnées (x ; $f(x)$) appartient à la représentation graphique de f.
2. Réciproquement si un point $M(x ; y)$ appartient à la représentation graphique de f alors $y = f(x)$.

2. Equations « produit nul »

2.1. Théorème

Soient a et b deux nombres tels que : $ab = 0$.

Premier cas : $a = b = 0$.

Deuxième cas : a et b ne sont pas tous les deux nuls alors deux sous cas peuvent se présenter :

- ***Soit $a \neq 0$***

  On a alors $b = \frac{ab}{a}$ et donc $b = 0$.

- ***Soit $b \neq 0$***

  On a alors $a = \frac{ab}{b}$ et donc $a = 0$.

On vient de démontrer la propriété suivante :

Théorème

Si un produit de deux facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul

Autrement dit :

Quels que soient les nombres a et b : si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

La réciproque de ce théorème est clairement vraie :

Propriété :

Si dans un produit de deux facteurs, l'un des deux facteurs au moins est nul alors le produit est nul.

Plus généralement, on admet les propriétés suivantes relative au produit d'un nombre quelconque de facteurs :

Théorème :

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

Et réciproquement :

Propriété :

Si dans un produit de facteurs, l'un des facteurs au moins est nul alors le produit est nul.

2.2 Application à la résolution « d'équations produit nul »

Résoudre l'équation $(2x + 3)(3x - 5) = 0$

$(2x + 3)(3x - 5) = 0$

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

Donc : $2x + 3 = 0$ ou $3x - 5 = 0$

Donc : $\boldsymbol{x} = -\dfrac{3}{2}$ ou $\boldsymbol{x} = \dfrac{5}{3}$

Remarque :
Pour l'instant, on a seulement établi que si l'équation avait des solutions, celles-ci ne pouvaient être que - et .
Il faut maintenant vérifier que ces deux nombres sont bien solutions de l'équation.

Vérification :

$$A=\left(2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right)\left(3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-5\right)$$
$$A=(-3+3)\left(3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-5\right)$$
$$A=0\times\left(3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-5\right)$$
$$A=0$$

$$B=\left(2\times\left(\frac{5}{3}\right)+3\right)\left(3\times\left(\frac{5}{3}\right)-5\right)$$
$$B=\left(2\times\left(\frac{5}{3}\right)+3\right)(5-5)$$
$$B=\left(2\times\left(\frac{5}{3}\right)+3\right)\times 0$$
$$B=0$$

Remarque : *D'après les deux calculs précédent, - et sont bien solutions de l'équation.*

Conclusion : les solutions de l'équation sont $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{3}$.

Chapitre 11 : Probabilités.

1. Introduction

1.1Approche expérimentale à l'aide d'un tableur.

1.1.1 Lancer une pièce équilibrée

A l'aide du tableur, on a simulé le lancé d'une pièce.

Quand on répète N fois cette expérience aléatoire, on observe que lorsque N devient de plus en plus grand, la fréquence de réalisation d'une des deux issues tend à se stabiliser vers une valeur proche de 1/2.

On admet que si la pièce est bien équilibrée, les « chances d'obtenir » l'une des deux issues possibles (pile ou face) sont les mêmes.

1.1.2 Lancer un dé équilibré.

A l'aide du tableur, on peut simuler le lancé d'un dé.

Quand on répète N fois cette expérience aléatoire, on observe que lorsque N devient de plus en plus grand, la fréquence de réalisation d'une des six issues tend à se stabiliser vers une valeur proche de 1/6.

On admet que si le dé est bien équilibrée, les « chances d'obtenir » l'une des six issues possibles sont les mêmes.

1.1.4 Synthèse

Dans une <u>expérience aléatoire</u>, on ne peut pas prévoir le résultat.

On admet qu'à chaque <u>issue</u> on peut faire correspondre un nombre qui « caractérise » les chances d'obtenir cette issue».

Ce nombre s'appelle la <u>**probabilité** d'obtenir cette issue.</u>

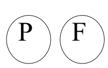
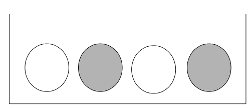
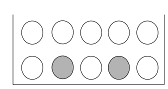
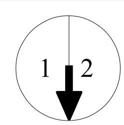
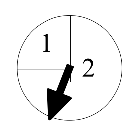
Exemples :

- Pour le lancé d'une pièce équilibrée, la probabilité « d'obtenir pile » est 1/2 tout comme la probabilité « d'obtenir face » .
- Pour le lancé d'un dé équilibré, la probabilité « d'obtenir 1 » est 1/6 tout comme la probabilité d'obtenir un autre chiffre compris entre 1 et 6.

Remarque :

Dans les deux exemples ci-dessus, toutes les issues ont la même probabilité.
On parle de situations <u>**d'équiprobabilité.**</u>

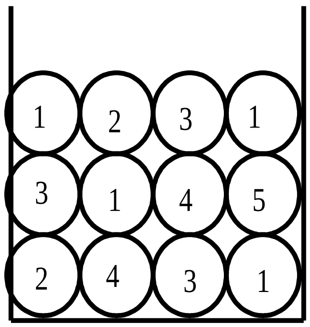
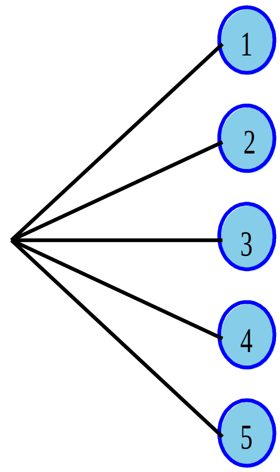
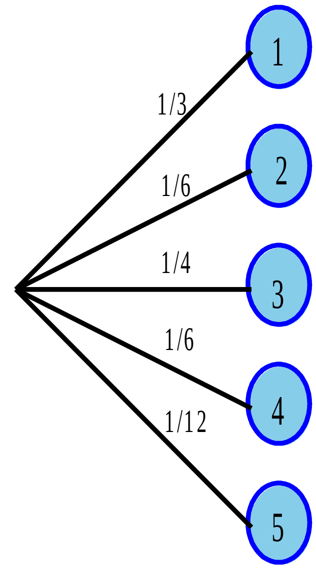
1.2 Exemples

Lancer une pièce équilibrée	Tirage dans une urne	Tirage dans une urne	Roue de loterie	Roue de loterie
				
P(face) = P(pile) = $\frac{1}{2}$	P(grise) = P(blanche) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	P(grise) = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ P(blanche) = $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	P(1) = P(2) = $\frac{1}{2}$	P(1) = $\frac{1}{4}$ P(2) = $\frac{3}{4}$

Remarques :

- Les situations 1 et 2 sont des situations d'équiprobabilité.
- La situation 5 n'est pas une situation d'équiprobabilité.

2. Représentation et traitement

<table>
<tr><th>Situation</th><th>Arbre des possibles</th><th>Arbre pondéré avec les probabilités</th></tr>
<tr>
<td>Tirage d’une boule dans une urne

</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

3. Définitions et propriétés

<u>Définitions</u> :

- **Une expérience est dite aléatoire lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.**
- **On appelle issue d'une expérience aléatoire tout résultat de cette expérience.**
- **L'ensemble des issues est appelé univers.**
- **Tout ensemble d'issues est appelé événement.**
- **Un événement élémentaire contient une seule issue.**
- **L'événement certain contient toutes les issues.**
- **L'événement impossible ne contient aucune issue.**
- **Des événements sont incompatibles ils n’ont aucune issue en commun.**
- **Deux événements sont contraires si toutes leurs issues forment l’univers et que ils n’ont aucune issue en commun**

Propriétés :

- **La probabilité d’un événement est comprise entre 0 et 1.**
- **La somme des probabilités d’un événement et de son contraire est égale à 1.**
- **La probabilité d'un événement (autre que l'événement impossible) est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.**
- **La probabilité d’un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0.**

Chapitre 12 : Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues 1.

1 Définitions

Exercice 12.1

Alexandra propose à Richard l'énigme suivante :

J'ai choisi deux nombres. Si j'ajoute le second nombre au double du premier nombre j'obtiens -3.
Si je retranche au premier nombre le double du second nombre, j'obtiens -4.

Peux-tu trouver ces deux nombres ?

Résoudre l'énigme proposée par Alexandra

Appelons x le premier nombre et y le deuxième, on a :

$$2x + y = -3 \ (1) \qquad \text{et} \qquad x - 2y = -4 \ (2)$$

Ces égalités sont appelées **des équations du premier degré à deux inconnues.**

Pour résoudre l'énigme d'Alexandra, il faut trouver les couples de nombres qui sont solutions simultanément des équations (1) et (2).
On parle de **système** formé par les équations (1) et (2).
Pour signifier que les deux équations sont vérifiées simultanément, on met une accolade :

$$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$$

Le couple (-2 ; 1) est solution des équations (1) et (2). On dit que le couple (-2 ; 1) est une solution du système.
Par contre, (1 ; -5) est solution de l'équation (1) mais pas de l'équation (2), ce couple n'est donc pas solution du système.

Définitions :

- **Un couple de nombres est solution d'un système de deux équations à deux inconnues signifie qu'il est solution des deux équations.**
- **Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver tous les couples solutions du système.**

Remarque :

On obtient à partir de (1) que : $y = -2x - 3$.

Ainsi à chaque valeur de x correspond une valeur de y, on en déduit que l'équation (1) a une infinité de solutions.
Il en est de même pour l'équation (2).

2. Résolutions d'un système par combinaison linéaire (par élimination) :

L'objectif des deux méthodes qui décrites ci-après c'est de ramener la résolution du système à la résolution d'une équation du premier degré avec une seule inconnue.

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$$

Le principe c'est d'éliminer l'une des deux inconnues.
Par exemple, ici on choisit d'éliminer ***x***.

- On multiplie les deux membres de la première équation par 3 et ceux de la deuxième par 2.
  Et on obtient le système ci-dessous qui <u>a les mêmes solutions que le système (S).</u>

$$\begin{cases} 6x+9y=3 \\ 6x-4y=-10 \end{cases}$$

- On en déduit que :

$$6x + 9y - (6x - 4y) = 3 - (-10)$$

$$13y = 13$$

$$y = 1$$

- On reporte la valeur de y obtenue dans la deuxième équation :

$$3x - 2 \times 1 = -5$$

$$3x = -5 + 2$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

Vérifications :

- $2 \times (-1) + 3 \times 1 = -2 + 3 = 1$.
- $3 \times (-1) - 2 \times 1 = -3 - 2 = -5$.

Conclusion : Le couple $(x ; y)$ solution du système est le couple $(-1 ; 1)$

Remarque :
On aurait pu choisir d'éliminer y. Pour cela, on peut multiplier la première équation par 5 et la deuxième par 3.

Chapitre 13 : Fonctions linéaires

1. Définition

Définition

Une fonction *f* est une fonction linéaire signifie qu'il existe un nombre *a* tel que :

Pour tout nombre x , $f(x) = ax$.

***a* est le coefficient de cette fonction.**

2 Lien avec la proportionnalité

Soit a un nombre.

- Soit f une fonction linéaire de coefficient a.

  Par définition, pour tout nombre x, on a $f(x) = ax$.

  Autrement dit les nombres sont proportionnels à leurs images. Un coefficient de proportionnalité étant a.

- Réciproquement, si f est une fonction telle que les nombres soient proportionnels à leurs images.

  Alors, il existe un nombre a tel que pour tout nombre x, $f(x) = ax$.

  f est donc une fonction linéaire de coefficient a par définition.

On vient de démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés

- **Si *f* est une fonction linéaire alors les nombres sont proportionnels à leurs images par *f*.**
- **Réciproquement, si une fonction *f* est telle que les nombres soient proportionnels à leurs images par *f* alors *f* est une fonction linéaire.**

3. Représentation graphique d'une fonction linéaire

On admet les théorèmes suivants :

Théorèmes :

- **La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.**
- **Réciproquement si une fonction est représentée par une droite passant par l'origine alors c'est une fonction linéaire.**

Remarques:

Soit f une fonction linéaire de coefficient a.

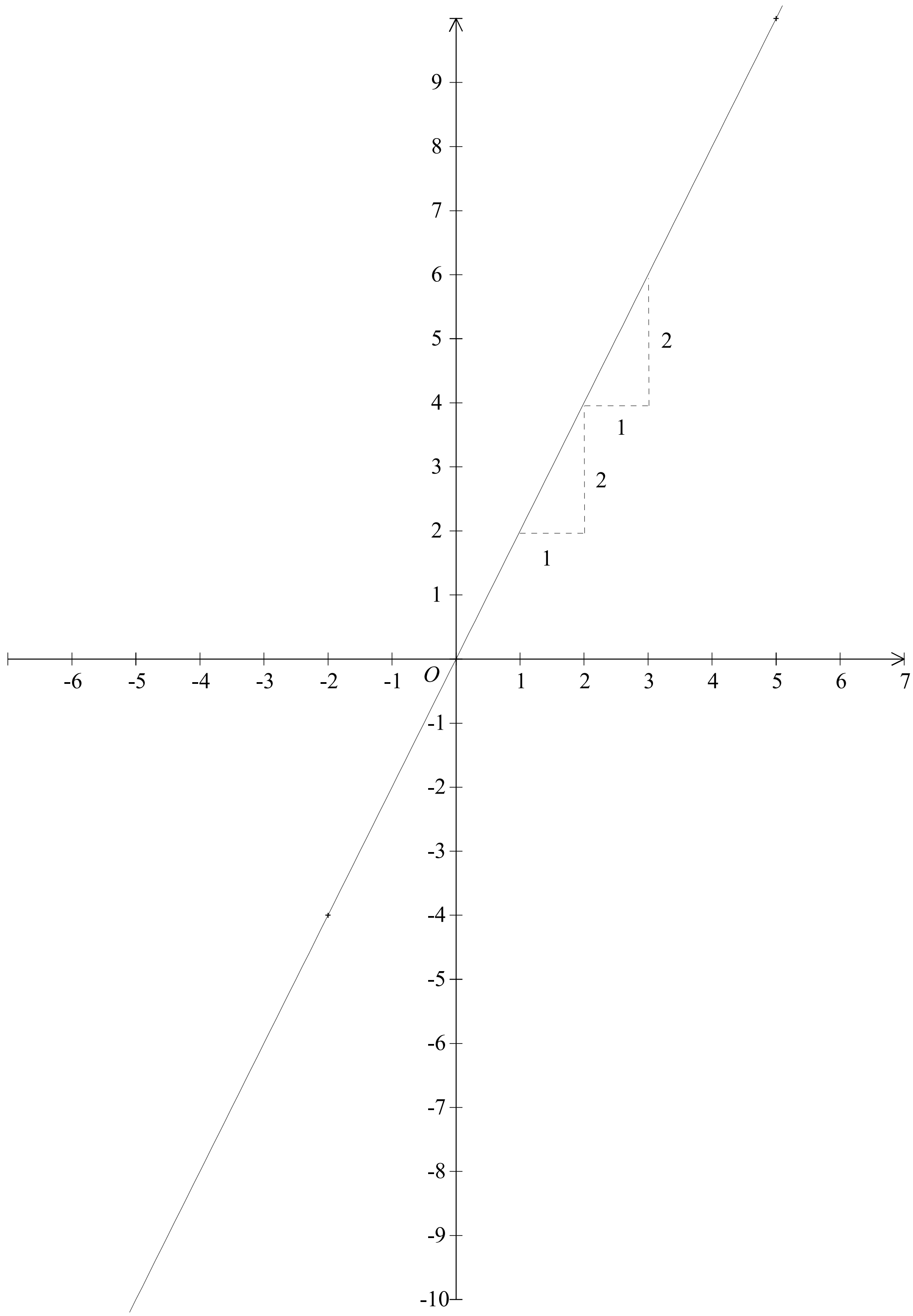
- Soient x un nombre et soit $y = f(x) = ax$ alors le point de coordonnées (x ; y) appartient à la représentation graphique de f.
- Réciproquement si un point M(x ; y) appartient à la représentation graphique de f alors $y = ax$.
- **La droite représentant f est la droite d'équation $y = ax$**

Exemple : Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 2x$

- f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

x	5	-2
$f(x)$	10	-4

- Cette droite passe par les points de coordonnées (0 ;0) ; (5 ; 10) et (-2 ; -4).



9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-6
-5
-4
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
5
6
7
2
1
2
1

4 Interprétation géométrique du coefficient d'une fonction linéaire

Soit a un nombre et soit f la fonction linéaire de coeffcient a.

Pour tout nombre x, on a :

$f(x) = ax$ et $f(x+1) = a(x + 1) = ax + a = f(x) + a$

On vient de démontrer partiellement la propriété suivante (uniquement le point 1) :

Propriété :

Soit f une fonction linéaire de coefficient a.

1. **Pour tout nombre x, on a : $f(x + 1) = f(x) + a$**
2. **Pour tout nombre x et pour tout nombre entier relatif k, on a $f(x + k) = f(x) + ka$**

Remarque :

Autrement dit lorsque x croît de 1 alors son image croît de a si a est positif et décroît de la valeur absolue de a si a est négatif.

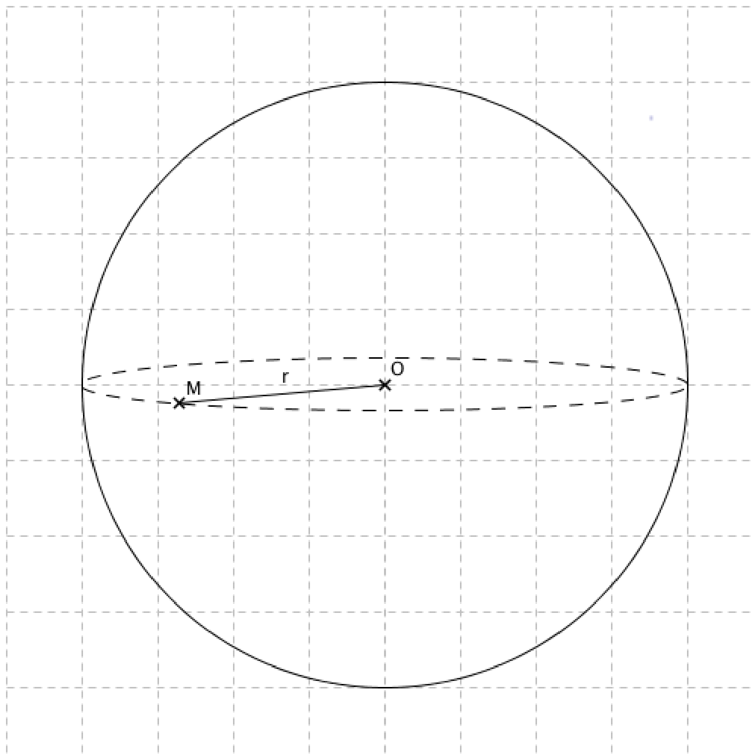
Vocabulaire :

Pour cette raison, a est aussi appelé **le coefficient directeur** de la droite qui représente f.

Chapitre 14 : Sphère et boule

1. La sphère et la boule

1.1 Définitions



Définitions :

Soient *r* un nombre positif et *O* un point de l'espace.

1. La sphère de centre *O* et de rayon *r*, ce sont tous les points *M* de l'espace tels que : $OM = r$.

2. La boule de centre *O* et de rayon *r*, ce sont tous les points *M* de l'espace tels que : $OM \leqslant r$.

2.2 Aire de la sphère

On admet le théorème suivant :

Théorème :

Soit *r* un nombre positif.

L'aire A d'une sphère de rayon *r* est donnée par la formule :

$$A = 4\pi r^2$$

Exemple : Calculer l'aire A d'une sphère de rayon 5 cm.

$A = 4 \times \pi \times 5^2$

$A = 100 \times \pi$ (valeur exacte)

$A \approx 314$

L'aire de la sphère est égale à 100π *cm²* soit environ 314 *cm²* par arrondi au *cm²* près.

2.3 Volume de la boule

On admet le théorème suivant :

Théorème :

Soit *r* un nombre positif.

Le volume V d'une boule de rayon *r* est donné par la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemple : Calculer le volume V d'une boule de rayon 2 mètres.

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 2^3$$

$$V = \frac{32}{3}\pi$$

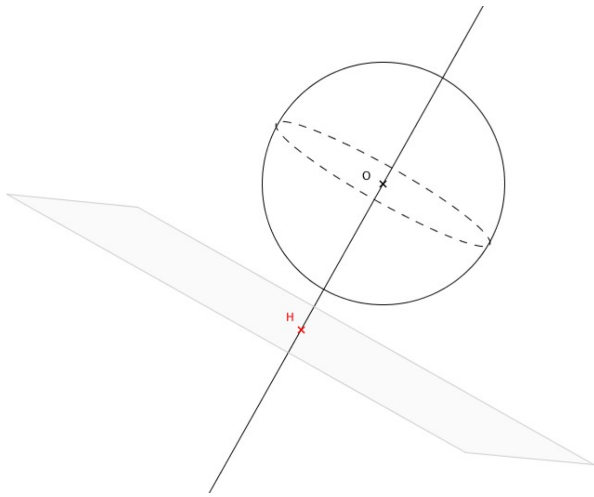
$$V \approx 34$$

Le volume de la boule est égale à $\frac{32}{3}\pi$ *cm³* soit environ 34 *cm³* par arrondi au *cm³* près.

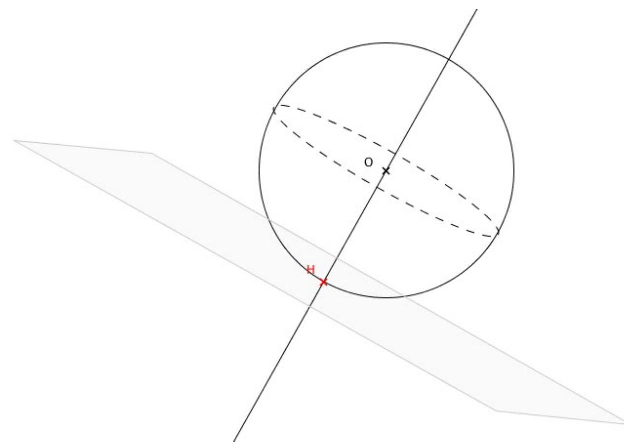
2. Section d'une sphère par un plan

Ne pas dessiner les quatre représentations ci-dessous.

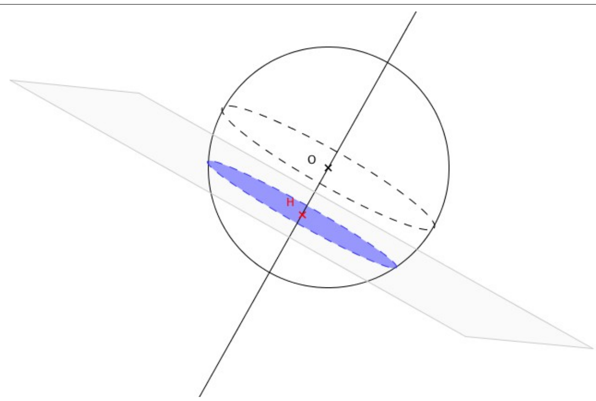
Mais, laisser une demi-page et noter la suite.



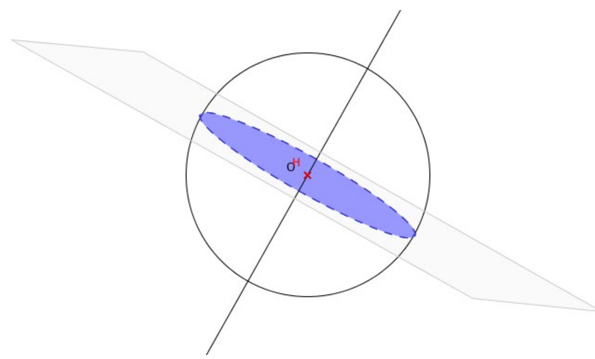
Cas : OH > r



Cas : OH = r



Cas : 0 < OH < r



Cas : OH = 0

On admet la propriété suivante :

Propriété :

Soient O un point et r un nombre positif.

Soit *(S),* la sphère de centre *O* et de rayon *r*.

Soit *(d)* une droite passant par *O* et *H* un point de *(d)*.

Soit (*P)* le plan passant par *H* et perpendiculaire à *(d)*

- **Si $OH = 0$ (c'est à dire que *H* et *O* sont confondus) alors l'intersection de *(P)* et de *(S)* est un cercle de centre *O*.**
  Un tel cercle est appelé grand cercle de *(S)*.
- **Si $0 < OH < r$, alors l'intersection de *(P)* et de *(S)* est un cercle de centre *H*.**
- **Si $OH = r$, alors l'intersection de *(P)* avec *(S)* est réduite au point *H*.**
  On dit alors que *(P)* est tangent à *(S)*.
- **Si $OH > r$, alors *(P)* et *(S)* n'ont aucun point en commun.**

Exercice

On suppose que la sphère a pour rayon 10 *cm* et que OH = 6 *cm*.

Quel est le périmètre et quelle est l'aire du cercle de section?

Soit A, un point du cercle de section.

- Dans le triangle AHO, rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore :

  $AO^2 = AH^2 + HO^2$

  $10^2 = AH^2 + 6^2$

  $AH^2 = 100 - 36 = 64$

  $AH = 8$

- On calcule le périmètre du disque de section :

  $P = 2 \times \pi \times 8 = 16\,\pi$

  Le périmètre du cercle de section est égal à $16\,\pi$ *cm*.

- On calcule l'aire du disque de section :

  $A = \pi \times 8^2 = 64\,\pi$

  L'aire du disque de section est égale à $64\,\pi\,cm^2$.

Chapitre 15 : Arithmétique 2.

1. L'algorithme de la différence

1.1 Conjecture

Soit a et b deux nombres entiers avec $a \geq b$.

Conjectures :

1. Il semble que : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; $a - b$)
2. Il semble que les diviseurs communs de a et b sont aussi ceux de b et $a - b$.

Remarque : L'affirmation 1 implique l'affirmation 2.

1.2 Démonstration

Hypothèse : Soit a et b deux nombres entiers avec $a \geq b$.

Objectif : démontrer que les diviseurs communs de a et b sont aussi ceux de b et $a - b$.

Il faut donc démontrer que :

- Les diviseurs communs de a et de b sont aussi des diviseurs communs de b et de $a - b$.
- La réciproque.

1. Soit d un diviseur commun de a et de b.

Par définition, il existe deux nombres entiers naturels k et k' tels que :
$b = kd$ et $a = k'd$
On a alors : $a - b = k'd - kd = (k' - k)d$
k' est supérieur à k (car a est supérieur à b).
On en déduit que $k' - k$ est un nombre entier naturel (différence d'un nombre entier naturel et d'un nombre entier naturel inférieur).
Donc : d est un diviseur de $a - b$.
Finalement d est un diviseur de b et de $a - b$.

2. Réciproquement, soit d un diviseur commun de b et de $a - b$

Par définition, il existe deux nombres entiers naturels k et k' tels que :

$b = kd$ et $a - b = k'd$

On a alors : $a = b + (a - b) = kd + k'd = (k' + k)d$

$k' + k$ est un nombre entier naturel (somme de deux nombres entiers naturels).

Donc d est un diviseur commun *de* a et b.

1.3 Enoncé de la propriété

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soient a et b sont deux nombres entiers avec $a \geq b$.

1. a et b d'une part et b et $a - b$ d'autre part ont les mêmes diviseurs communs.

2. En particulier : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$)

2.2 Application au calcul du PGCD de deux nombres entiers

Pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers a et b, on peut utiliser l'algorithme de la différence.

Exemple :

On utilise l'algorithme de la différence

PGCD (1394 ; 255) = PGCD (255 ; 1139)

= PGCD (255 : 884)

= PGCD (255 ; 629)

= PGCD (255 ; 374)

= PGCD (255 : 119)

= PGCD (119 ; 136)

= PGCD (119 ; 17)

= PGCD (102 ; 17)

= PGCD (17 ; 85)

= PGCD (17 ; 68)

= PGCD (17 ; 51)

= PGCD (17 ; 34)

= PGCD (17 ; 17) = 17

2. L’algorithme d’Euclide

2.1 Préliminaires

Soit n un nombre entier et soient a et b deux multiples de n avec $a \geq b$.

Par définition, il existe deux nombres entiers k et k' tels que :

$a = kn$ *et* $b = k'n$

On a : $a + b = kn + k'n = (k + k')n$ *et* $a - b = (k - k')n$

$k + k'$ *et* $k - k'$ *étant deux nombres entiers naturels (* $a \geq b$ *implique que* $k \geq k'$*).*

On en déduit que $a + b$ *et* $a - b$ *sont deux multiples de n.*

Soit n un nombre entier, soit a un multiple de n et soit c un nombre entier naturel.

Par définition, il existe un nombre entier k tel que :

$a = kn$

On a : $ca = c(kn) = (ck)n$ *(associativité de la multiplication).*

On en déduit que ca est un multiple de n.

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soit n un nombre entier naturel.

La somme et la différence (on soustrait le plus petit au plus grand) de deux multiples de n est un multiple de n.

Le produit d'un multiple de n par un nombre entier naturel est un multiple de n.

2.2 Conjecture

Soit a et b deux nombres entiers avec $a \geq b$.

Il existe un couple unique de nombres (q ; r) tel que :

$a = bq + r$ *avec* $b > r \geq 0$

Il semble que : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)

2.3 Démonstration

Hypothèses :

Soit a et b deux nombres entiers avec $a \geq b$.

Il existe un couple unique de nombres (q ; r) tel que :

$a = bq + r$ *avec* $b > r \geq 0$

Idée : *Montrer que les diviseurs communs de a et b sont aussi ceux de b et r.*

Rappel : *deux nombres entiers ont au moins un diviseur commun : 1.*

Soit d un nombre entier qui est un diviseur commun de a et b.

d divise b donc il divise bq.

d divise a et bq donc il divise $a - bq = r$.

Finalement d est un diviseur commun de b et r.

Réciproquement, soit d un nombre entier qui est un diviseur de b et r

d divise b donc il divise bq.

d divise r et bq donc il divise $bq + r = a$.

Finalement d est un diviseur commun de b et a.

2.4 Enoncé de la propriété

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soient a et b sont deux nombres entiers avec $a \geq b$.

Si on note r le reste et q le quotient de la division euclidienne de a par b et q le quotient alors :

1. **a et b d'une part et b et r d'autre part ont les mêmes diviseurs communs.**
2. **En particulier : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)**

2.5 Application au calcul du PGCD de deux nombres entiers

Exercice 15.2

Objectif : Déterminer PGCD(1394 ; 255):

- On effectue la division euclidienne du plus grand des deux nombres par le plus petit :

$1394 = 255 \times 5 + 119$

D'après la propriété précédente, on a : PGCD (1394 ; 255) = PGCD (255 ; 119).

- Puis, on effectue la division euclidienne du diviseur par le reste de la division précédente. On répète ce procédé jusqu'à ce que le reste de la division euclidienne soit égal à 0 :

$255 = 119 \times 2 + 17$

$119 = 17 \times 7$

D'après la propriété précédente, on a :

PGCD (1394 ; 255) = PGCD (255 ; 119)
= PGCD (119 ; 17) = 17 car 17 est un diviseur de 119.

Rédaction :

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$1394 = 255 \times 5 + 119$

$255 = 119 \times 2 + 17$

$119 = 17 \times 7$

Donc

PGCD (1394 ; 255) = PGCD (255 ; 119)
= PGCD (119 ; 17) = 17 car 17 est un diviseur de 119.

Conclusion : L'artisan peut réaliser au maximum 17 colliers.

Remarque : *On peut utiliser la ressource n°40 sur le site Euler.*

Chapitre 16 : Fonctions affines

1 Définition

Définition

Une fonction f est une fonction affine signifie qu'il existe deux nombres a et b tels que :

Pour tout nombre x , $f(x) = ax + b$.

Remarque :

Toute fonction linéaire est une fonction affine. C'est le cas où $b = 0$.

2. Représentation graphique d'une fonction affine

On admet les théorèmes suivants :

Théorèmes :

- **La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.**
- **Réciproquement si une fonction est représentée par une droite c'est une fonction affine.**

Remarques:

Soient a et b deux nombres et soit f la fonction affine définie par $f : x \mapsto ax+b$

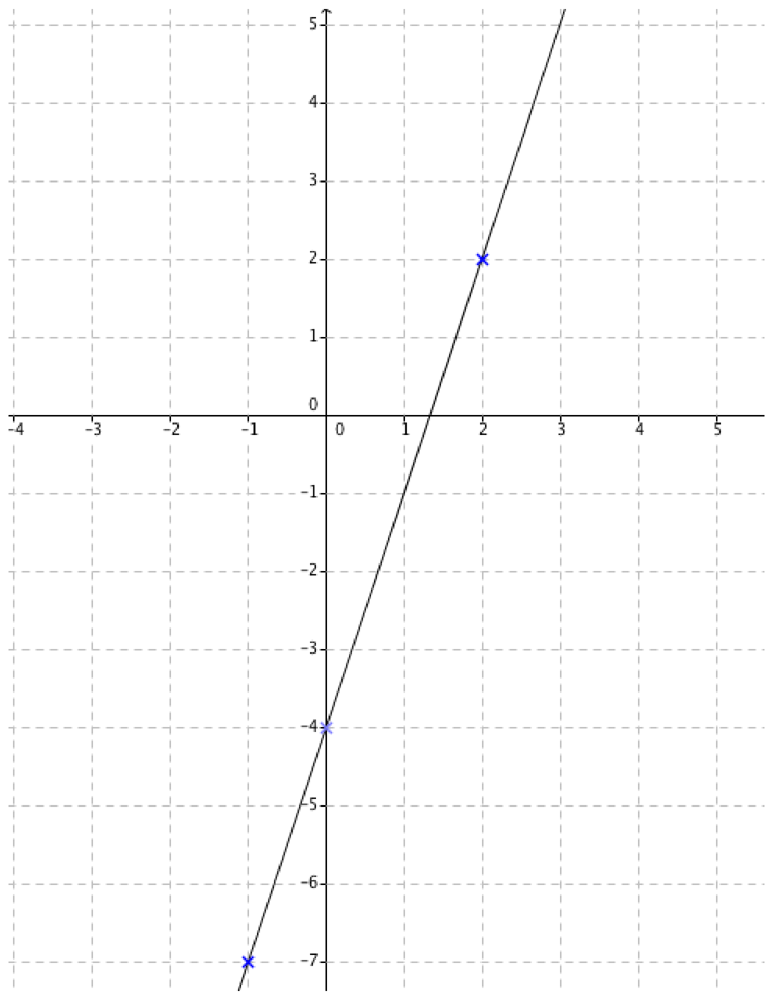
- Soient x un nombre et soit $y = f(x) = ax + b$ alors le point de coordonnées (x ; y) appartient à la représentation graphique de f.
- Réciproquement si un point M(x ; y) appartient à la représentation graphique de f alors $y = ax + b$
- La droite représentant f est la droite d'équation $y = ax + b$

Exemple : Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 3x-4$

- f est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite

x	2	-1	0
$f(x)$	2	-7	-4

- Cette droite passe par les points de coordonnées (2 ; 2) ; (-1 ; -7) et (0 ; -4).

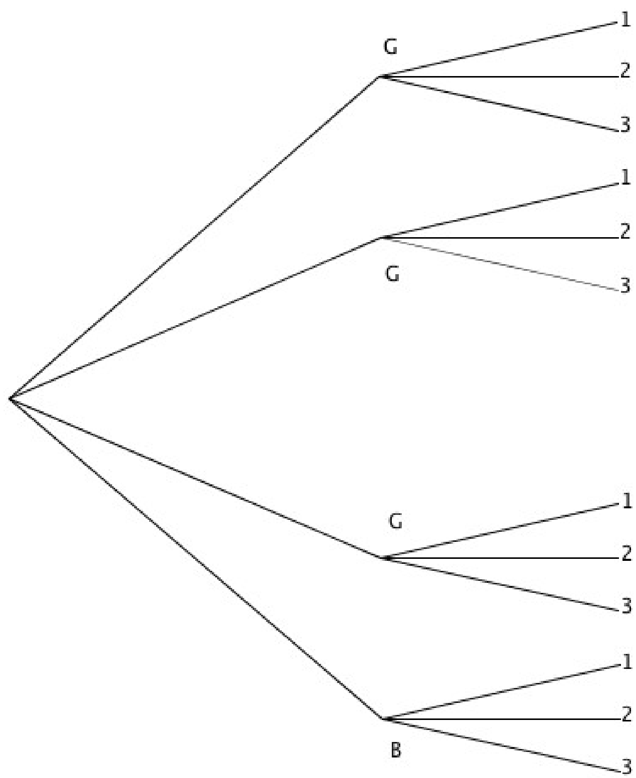


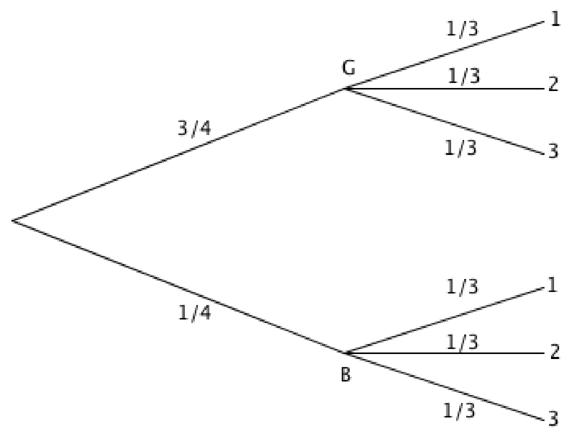
Chapitre 17 : Probabilités 2. Expériences à deux épreuves

On considère l'expérience suivante, qui se déroule en deux étapes :

- D'abord, on tire une boule dans une urne qui contient 3 boules grises et 1 boule blanche.
- Ensuite, on tire dans une deuxième urne des boules numérotées de 1 à 3.

Représentons un arbre des possibles et pondérons le par les probabilités.





L'univers est :

Ω = {(G;1) ; (G ;2) ; (G;3) ; (B;1) ; (B ; 2) ; (B ; 3)

On a par exemple :

$P(G;3)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

On peut remarquer que : $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

Remarque :

La probabilité d’un événement est égal au produit des probabilités rencontrées sur le chemin de l’arbre des possibles pondérés par les probabilités.

Chapitre 18 : Puissances.

1. Définitions

Définitions :

- **Quel que soit le nombre a et quel que soit l'entier *n* supérieur à 2, on pose :**

  - $a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ facteurs } a}$ et $a^1 = a$

- **Quel que soit le nombre *a* non nul et quel que soit l'entier *n* supérieur à 1, on pose :**

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2.Propriétés

On admet les propriétés suivantes :

Théorème Pour tous nombres *a* et *b* non nuls et tous nombres entiers relatifs *m* et *n*, on a :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

3. Puissances de dix

2.1 Calcul d'une puissance de dix

On admet la propriété suivante :

Propriété

Pour tout nombre strictement positif n, on a :

$$10^n = 1\underbrace{00...0}_{n\ zéros} \quad et \quad 10^{-n} = \underbrace{0{,}0...0}_{n\ zéros}1$$

2.2 Produit d'un nombre décimal par une puissance de dix

On admet les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit *n* un nombre entier naturel.

- **Pour calculer le produit d'un nombre décimal par 10^n, on déplace la virgule de *n* rangs vers la droite.**
- **Pour calculer le produit d'un nombre décimal par 10^{-n}, on déplace la virgule de *n* rangs vers la gauche.**

2.3 Ecriture scientifique d'un nombre décimal.

Propriété - définition

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ où :

- ***a* est un nombre décimal dont la valeur absolue est supérieur à 1 et strictement inférieur à 10.**
- ***n* est un nombre entier relatif.**

Cette écriture est <u>l'écriture scientifique de ce nombre décimal.</u>

Chapitre 19 : Inégalités. Inéquations.

1. Lien entre le signe de deux nombres et le signe de leur différence

On admet le théorème suivant :

Théorème

Soient a et b deux nombres.

1. Si $a > b$ alors $a - b > 0$.

Si $a < b$ alors $a - b < 0$

2. Réciproquement :

Si $a - b > 0$ alors $a > b$

Si $a - b < 0$ alors $a < b$.

Application : comparer $\frac{3}{16}$ et $\frac{1}{6}$.

Pour comparer ces deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence :

$$D=\frac{3}{16}-\frac{1}{6}$$
$$D=\frac{9}{48}-\frac{8}{48}$$
$$D=\frac{1}{48}$$

On a $\frac{3}{16}-\frac{1}{6}=\frac{1}{48}>0$

D'après le théorème précédent, on en déduit que :

$$\frac{3}{16}>\frac{1}{6}$$

Remarque : pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur diffrence.

2. Comparaison de sommes

2.1 Conjecture

Dans le cahier d'exercices, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture :

Soient a et b deux nombres avec $a > b$.
Il semble que pour tout nombre c, on ait :

$$a + c > b + c$$

2.2 Démonstration

Hypothèse : a et b sont deux nombres avec $a > b$.

Soit c un nombre.

Idée : Pour comparer $a + c$ et $b + c$, étudions le signe de leur différence :

$$\begin{aligned} a + c - (b + c) &= a + c - b - c \\ &= a - b \end{aligned}$$

De plus, $a > b$ par hypothèse.

Donc : $a - b > 0$ (Théorème paragraphe 1).

On en déduit que : $a + c - (b + c) > 0$

Finalement : $a + c > b + c$ (Théorème paragraphe 1).

2.3 Enoncé de la propriété

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soient a, b deux nombres.

Si $a < b$ alors pour tout nombre c, on a : $a + c < b + c$.

3. Comparaison de produits

3.1 Conjecture

Dans le cahier d'exercices, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture : Soient a et b deux nombres avec $a > b$.

Il semble que pour tout nombre positif c, on ait : $ac > bc$

Il semble que pour tout nombre négatif c, on ait : $ac < bc$

2.2 Démonstration

Hypothèse : a et b sont deux nombres avec $a > b$ *et* c est un nombre.

Idée : Pour comparer ac et bc, étudions le signe de leur différence :

$ac - bc = (a - b)c$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

De plus, $a > b$ par hypothèse donc : $a - b > 0$ (Théorème paragraphe 1).

Deux cas de figure peuvent alors se présenter.

Cas 1 : $c > 0$: Dans ce cas $(a - b)c$ est positif car c'est le produit de deux nombres positifs.

On en déduit que : $ac > bc$.

Cas 2 : $c < 0$: Dans ce cas $(a - b)c$ est négatif car c'est le produit de deux nombres de signes contraires.

On en déduit que : $ac < bc$.

3.3 Enoncé de la propriété

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soient a, b deux nombres.

Si $a > b$ alors pour tout nombre positif c, on a : $ac > bc$.

Si **$a > b$ alors pour tout nombre négatif c, on a : $ac < bc$.**

2. Inéquations

Exercice 20.2

Un loueur de VTT affiche les tarifs suivants :

Tarif 1 : abonnement de 30 euros pour la semaine, auquel il faut ajouter 5,5 euros de l'heure.

Tarif 2 : abonnement de 40 euros pour la semaine, auquel il faut ajouter 5 euros de l'heure.

Quel est le tarif le plus intéressant ?

a. Pour x minutes de télécommunication, on paye $5{,}5x + 30$ euros avec le tarif 1.

b. Pour x minutes de télécommunication, on paye $40 + 5x$ euros avec Settelecom.

c. Le tarif proposé pour x minutes de télécommunication est plus intéressant avec Big télécom qu'avec Settelecom lorsque :

$$40 + 5x < 5{,}5x + 30 \quad \text{(I)}$$

Cette inégalité est appelée <u>**une inéquation d'inconnue x**</u>.

<u>**Définitions**</u>

Un nombre est <u>solution</u> de l'inéquation (I) si en remplaçant x par ce nombre, l'inégalité est vraie.

<u>Résoudre une inéquation</u>, c'est trouver <u>toutes les solutions</u> de cette inéquation.

Résolution de l'inéquation : On utilise les propriétés relatives à inégalités et opérations.

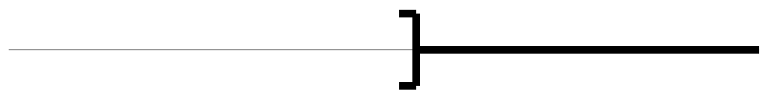
Première démarche	**Deuxième démarche**
$40 + 5x < 5{,}5x + 30$ $40 + 5x - 30 < 5{,}5x + 30 - 30$ $10 + 5x < 5{,}5x$ $10 + 5x - 5x < 5{,}5x - 5x$	$40 + 5x < 5{,}5x + 30$ $40 + 5x - 40 < 5{,}5x + 30 - 40$ $5x < 5{,}5x - 10$ $5x - 5{,}5x < 5{,}5x - 5{,}5x - 10$ $-0{,}5x < -10$

$10 < 0{,}5x$ $\frac{10}{0{,}5} < x$ $20 < x$	$x > \frac{-10}{-0{,}5}$ $x > 20$

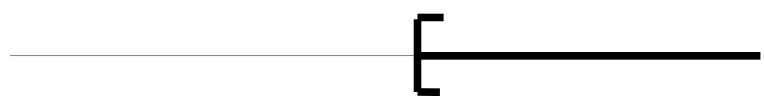
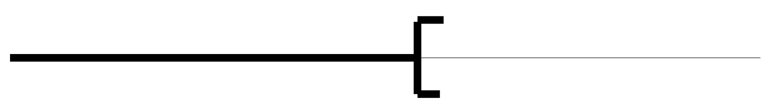
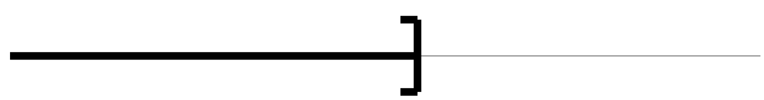
Conclusions :

- Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à 20.
- Concrètement, le tarif 1 est plus avantageux que le tarif Settelecom à partir de 20 heures de location..
- On peut aussi représenter <u>graphiquement</u> l'ensemble des solutions sur une droite graduée:

20



Autres exemples de représentation graphique d'un ensemble de solutions :

Inégalités	**Représentations graphiques**
$x \geqslant 20$	20 
$x < 20$	20 
$x \leqslant 20$	20 

Chapitre 20 : Factorisations d'expressions littérales

1. DM 4.3

Exercice 2

On donne les deux programmes de calculs suivants :

Programme A	Programme B
Choisir un nombre. Calculer la différence de ce nombre et de 10. Calculer le produit du résultat obtenu par le nombre de départ diminué de 4.	Choisir un nombre. Lui soustraire 7. Elever au carré le résultat obtenu. Lui soustraire 9

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

Affirmation 1 :
Les deux programmes donnent toujours le même résultat.

Affirmation 2 :

Il existe exactement deux nombres pour lesquels le résultat obtenu avec le programme B est 0.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :
Pour tout nombre x, $f(x) = x^2 – 14x + 49$

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation :
Si un nombre est strictement négatif, alors il n'a pas d'antécédent par f.

Question supplémentaire : Qu'en est-il des autres nombres ?

Exercice 2

Affirmation 1 :

Essayons : si le nombre de départ est 2, on a :

$(2-10)\times(2-4)=(-8)\times(-2)=16$ avec le programme A.

Et $(2-7)^2-9=25-9=16$ avec le programme B.

L'affirmation est vraie dans ce cas particulier.

Etudions le cas général :

Pour tout nombre x, on note $A(x)$ le résultat obtenu avec le programme A et $B(x)$ celui obtenu avec le programme B.

Pour tout nombre x, on a :

$A(x) = (x - 10)(x - 4)$ et $B(x) = (x - 7)^2 - 9$

- **Méthode 1 : On développe les deux expressions :**

  Pour tout nombre x, on a :

$A(x) = (x - 10)(x - 4)$ $A(x) = x^2 - 10x - 4x + 40$ $A(x) = x^2 - 14x + 40$	$B(x) = (x - 7)^2 - 9$ $B(x) = x^2 - 14x + 49 - 9$ $B(x) = x^2 - 14x + 40$

  Ainsi, Pour tout nombre x, on a : $A(x) = B(x)$.

  Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.

- **Méthode 2: On factorise $B(x)$:**

  Pour tout nombre x, on a :

  $B(x) = (x - 7)^2 - 9$

  $B(x) = (x - 7)^2 - 32$

  $B(x) = (x - 7 - 3)(x - 7 + 3)$

  $B(x) = (x - 10)(x - 4)$

  $B(x) = A(x)$.

Affirmation 2 :

On cherche les solutions de l'équation :

$$(x - 7)^2 - 9 = 0$$

C'est à dire de l'équation :

$$(x - 4)(x - 10) = 0 \quad \textit{(d'après la factorisation précédente).}$$

Les solutions de cette « équation produit nul » sont 4 et 10.

Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

Exercice 3

Après avoir calculé les images de plusieurs nombres par la fonction f, on s'aperçoit que l'on obtient que des nombres positifs.

Etudions le cas général :

Pour tout nombre x, on a :

$f(x) = x^2 - 14x + 49$ (forme développée)
$f(x) = (x - 7)^2$ (forme factorisée)

Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, on en déduit que :

Pour tout nombre x, $f(x)$ est positif.

Par conséquent un nombre strictement négatif ne peut pas avoir d'antécédent.

L'affirmation est donc vraie.

2. Synthèse

2.1 Définition

Définition :

Factoriser une somme (une différence), c'est la transformer en produit.

2.2 Techniques de factorisation d'expressions littérales

En troisième, on rencontre deux techniques pour factoriser des expressions littérales :

- Technique 1 : On utilise les identités remarquables. (Voir les exercices précédents)
- Technique 2 : On utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

  Exemples :

  Pour tout nombre x, on a :

  $D(x) = \underline{(3x + 5)}(6x + 7) + \underline{(3x + 5)}(4x + 2)$
  $D(x) = (3x + 5)(6x + 7 + 4x + 2)$
  $D(x) = (3x + 5)(10x + 9)$

  $E(x) = \underline{(4x + 5)}(2x - 3) - \underline{(4x + 5)}(5x + 2)$
  $E(x) = (4x + 5)(2x - 3 - (5x + 2))$
  $E(x) = (4x + 5)(2x - 3 - 5x - 2)$
  $E(x) = (4x + 5)(-3x - 5)$

Chapitre 21 : Fonctions affines 2.

1. Interpretation graphique des coefficients

Soient a et b deux nombres et soit f la fonction affine définie par :

Pour tout nombre x, $f(x) = ax + b$.

- On a $f(0) = b$
  Donc la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

- Pour tout nombre x, on a :
  $f(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b = (ax + b) + a = f(x) + a$

- Pour tout nombre x et pour tout nombre entier relatif k, on a :
  $f(x + k) = a(x + k) + b = ax + ka + b = (ax + b) + ka = f(x) + ka$

<u>Propriétés :</u>

Soient a et b deux nombres, soit f, la fonction affine définie par :
Pour tout nombre x, $f(x) = ax + b$

- **Pour tout nombre x, $f(x + 1) = f(x) + a$**
- **Pour tout nombre x et pour tout nombre entier relatif k, on a : $f(x + k) = f(x) + ka$**
- **La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.**

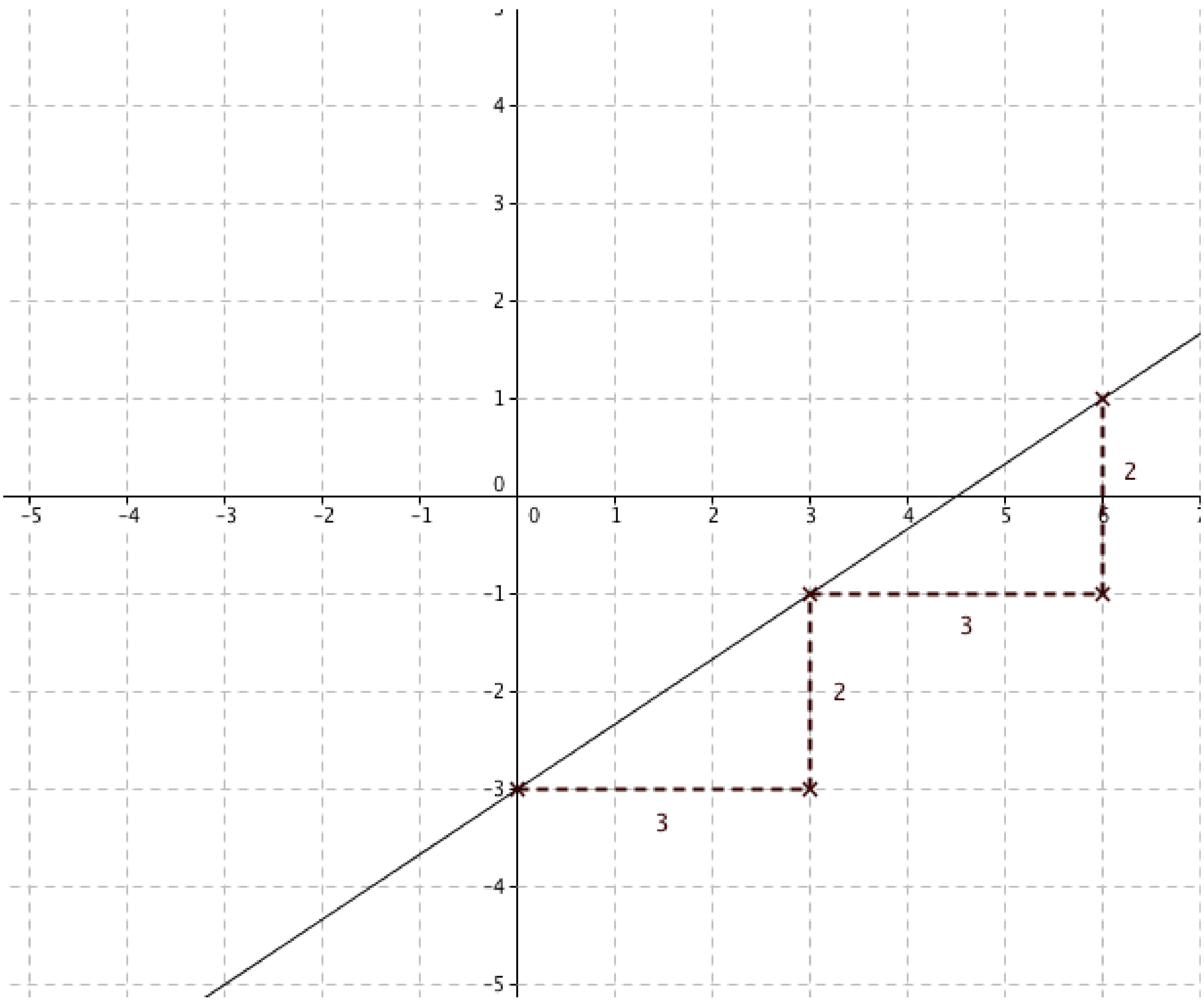
Remarque :
Autrement dit lorsque x croît de 1 alors son image croît de a si a est positif et décroît de la valeur absolue de a si a est négatif.

Vocabulaires :
a est aussi appelé **<u>le coefficient directeur</u>** de la droite qui représente f et b est appelée **<u>l'ordonnée à l'origine</u>** de cette droite.

Application : représenter graphiquement la fonction *f* définie par :

Pour tout nombre *x*, $f(x)=\frac{2}{3}x-3$

f est une fonction affine donc sa représentation graphique est la droite d'équation $y=\frac{2}{3}x-3$ d'ordonnée à l'origine -3 et de coefficient directeur $\frac{2}{3}$



2. Déterminer une fonction affine connaissant deux nombres et leurs images

Exercice

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation : Il existe une seule fonction affine telle que : $f(-2) = -1$ et $f(1) = 5$.

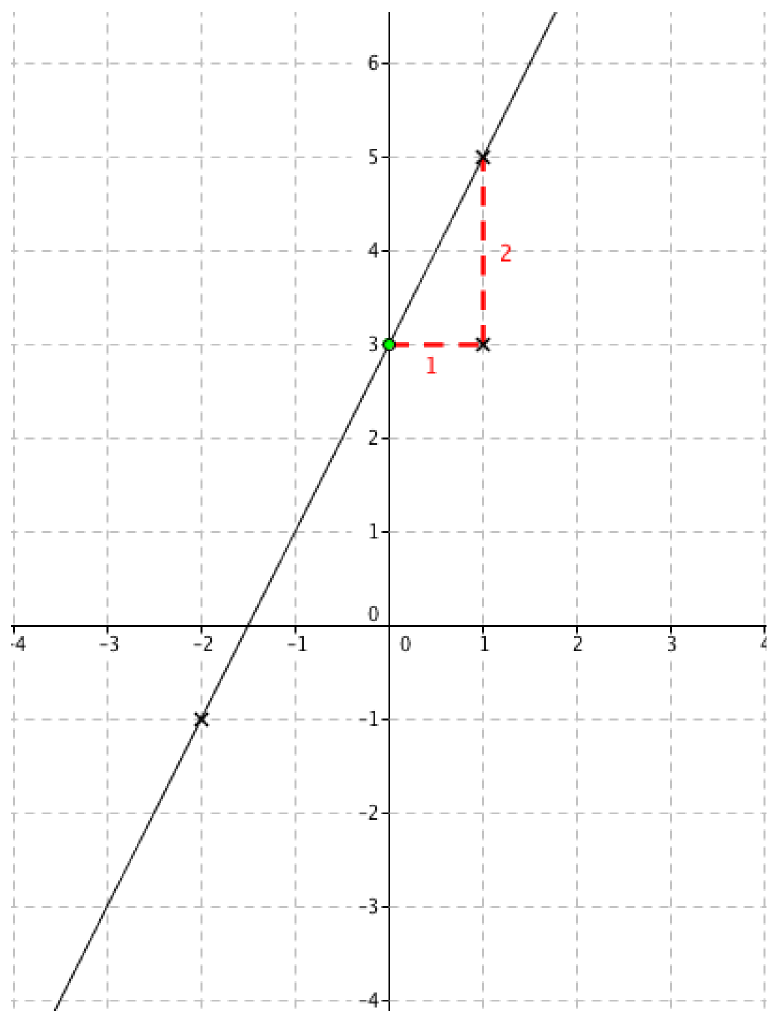
2.1 Méthode graphique

Supposons qu'une telle fonction f existe.

f étant une fonction affine sa représentation graphique est une droite.

De plus : $f(-2) = -1$ et $f(1) = 5$

On en déduit que cette droite passe par les points de coordonnées (-2 ; -1) et (1 ; 5)



On lit que l'ordonnée à l'origine est 3 et le coefficient directeur est 2.

f serait donc la fonction définie par :

Pour tout nombre x, $f(x) = 2x + 3$

Vérification :

$f(-2) = -2 \times 2 + 3 = - 4 + 3 = -1$ et $f(1) = 2 + 3 = 5$

Conclusion : Pour tout nombre x, on a : $f(x) = 2x + 3$

L'affirmation est donc vraie.

2.1 Méthode algébrique

Supposons qu'une telle fonction f existe.

f est une application affine, donc par définition il existe deux nombres a et b tels que :

Pour tout nombre x, $f(x) = ax + b$

- $f(-2) = -1$ d'où $-1 = -2a + b$
- $f(1) = 5$ d'où $5 = a + b$

a et b sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} -2a+b=-1 \\ a+b=5 \end{cases}$$

On en déduit que :

$-2a + b - (a + b) = - 1 - 5$

$-2a + b - a - b = -6$

$-3a = -6$

$a = 2$

On remplace a par 2 dans la deuxième équation :

$2 + b = 5$ d'où $b = 5 - 2 = 3$

Vérification :

$-2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1$ et $2 + 3 = 5$

Conclusion : Pour tout nombre x, on a : $f(x) = 2x + 3$

Chapitre 22 : Trigonométrie 1

1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

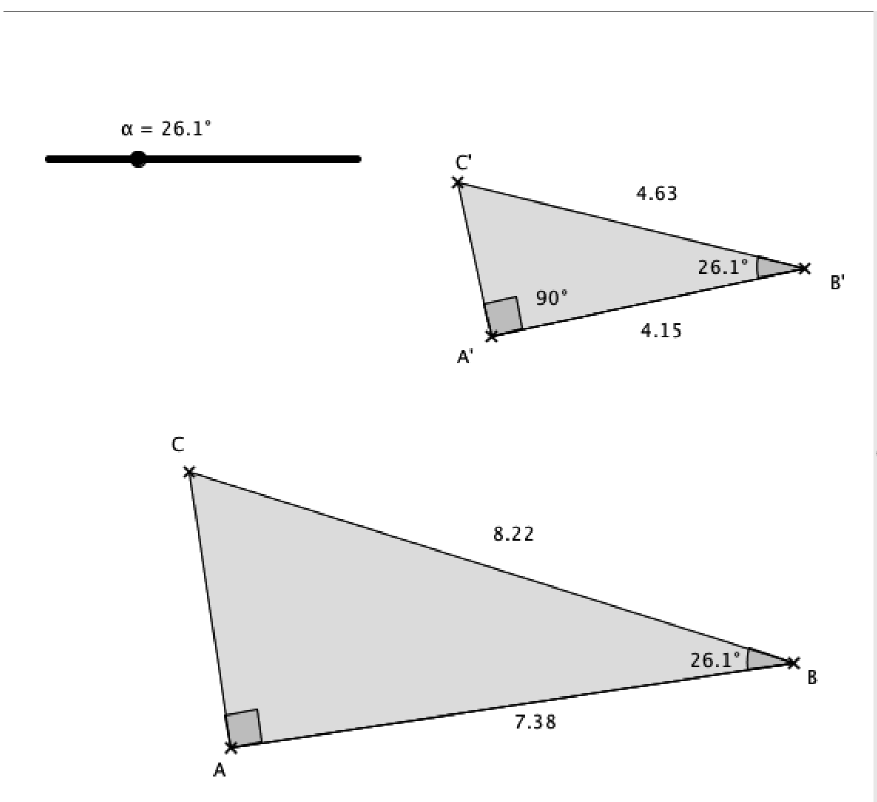
1.1 Enoncé du problème

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation : Si ABC et A'B'C' sont deux triangles respectivement rectangles en A et A' tels que : $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ alors on a :

$$\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'}$$

1.2 Conjecture



	A	B	C
1	AB	BC	AB/BC
2	7.38	8.22	0.9
3			
4	A'B'	B'C'	A'B'/B'C'
5	4.15	4.63	0.9
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			

Données :

ABC et A'B'C' sont deux triangles respectivement rectangles en A et A' tels que : $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$

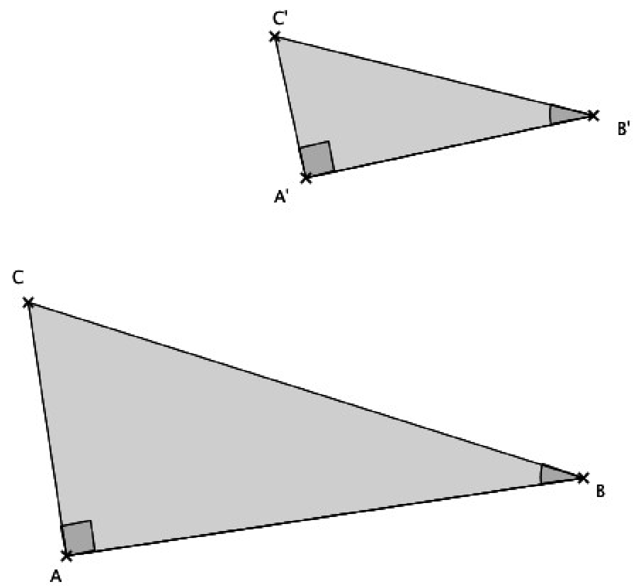
A l'aide de géogébra, on a formulé la conjecture suivante :

Conjecture : Il semble que : $\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'}$

1.3 Démonstration

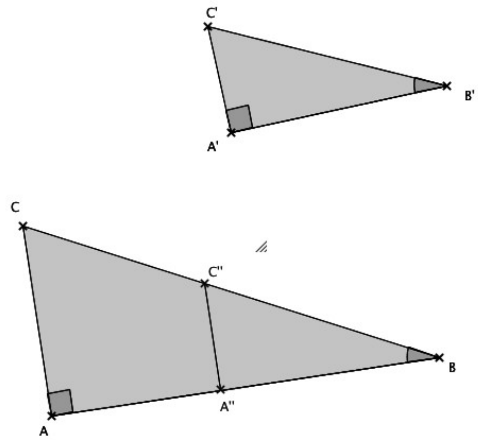
Hypothèse :

ABC et A'B'C' sont deux triangles respectivement rectangles en A et A' tels que : $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$



Idée de la démonstration : utiliser le théorème de Thalès.

- **Préliminaires**



On place le points A" sur [BA) tel que : BA" = B'A.

Puis on place le point C" tel que : BC" = B'C' et A"C" = A'C'

Autrement dit le triangle A"B"C" a les mêmes dimensions que le triangle A'B'C' (on dit que ces deux triangles sont <u>isométriques</u>)

On admet que que dans ce cas les angles des deux triangles sont égaux.

En particulier, on a : $\widehat{C'B'A'}=\widehat{C''BA''}$

Compte tenu de l'hypothèse, on a donc : $\widehat{CBA}=\widehat{C''BA''}$

On en déduit que : les points B, C" et C sont alignés.

- **On démontre que les droites (AC) et (A"C") sont parallèles**

On a : $\widehat{BAC}=90\ ^\circ$ et $\widehat{B''AC''}=\widehat{B'A'C'}=90\ ^\circ$

Donc les droites (AC) et (A"C") sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB).

Donc les droites (AC) et (A"C") sont parallèles.

- **On applique le théorème de Thalès**

On sait que : les droites (CC") et (AA") sont sécantes en B.

Les droites (AC) et (A"C") sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{\mathrm{BA''}}{\mathrm{BA}}=\frac{\mathrm{BC''}}{\mathrm{BC}}$

- **On démontre que :** $\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'}$

  D'après l'étape précédente, on a : $\frac{BA''}{BA}=\frac{BC''}{BC}$

  Donc : $\frac{BA'}{BA}=\frac{BC'}{BC}$

  Donc : $BA'\times BC=BC'\times BA$ (Egalité des produits en croix).

  Donc : $\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'}$

On démontrerait de la même façon que :

$$\frac{CA}{BC}=\frac{C'A'}{B'C'} \quad \text{et} \quad \frac{CA}{BC}=\frac{C'A'}{B'C'}$$

1.4 Enonce de la propriété

On vient de démontrer partiellement la propriété suivante :

Propriété :

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles respectivement rectangles en A et A' avec $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ **alors :**

$$\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'} \quad ; \quad \frac{CA}{BC}=\frac{C'A'}{B'C'} \quad \text{et} \quad \frac{CA}{BC}=\frac{C'A'}{B'C'}$$

1.5 Définitions

On pose alors les définitions suivantes :

Définitions

Soit ABC un triangle rectangle en A

- **Cosinus de l'angle :**

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}}{longueur\ de\ l'\ hypoténuse}$$

- **Sinus de l'angle :**

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ \widehat{ABC}}{longueur\ de\ l'\ hypoténuse}$$

- **Tangente de l'angle :**

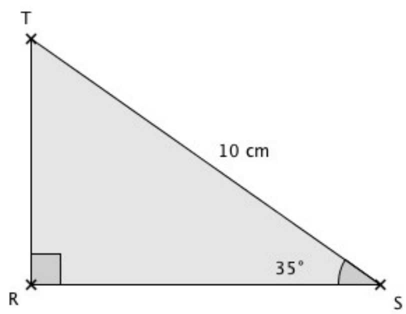
$$\tan \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ \widehat{ABC}}{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}}$$

Remarques :

- On a aussi : $\cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC}$; $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$
- On peut retenir ces trois égalités à l'aide de « SOHCAHTOA ».

2. Utiliser la trigonométrie dans un triangle rectangle pour calculer la longueur d'un côté.

2.1 Exemple 1



Données :

- RST est un triangle rectangle en R.
- $\widehat{RST} = 35°$
- TS = 10 *cm*

Calculer TR

Dans le triangle RST, rectangle en R, on a :

$$\sin \widehat{\mathrm{RST}} = \frac{\mathrm{TR}}{\mathrm{TS}}$$

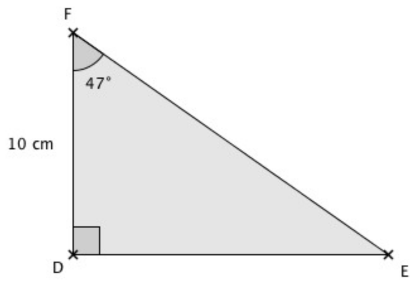
$$\frac{\sin 35°}{1} = \frac{\mathrm{TR}}{10}$$

$$\mathrm{TR} = \frac{10 \times \sin 35°}{1} = 10 \times \sin 35°$$

TR ≈ 5,73

TR est eégale à environ égale à 5,7 *cm* par arrondi au dixième.

2.2 Exemple 2



Données :

- DEF est un triangle rectangle en D.
- $\widehat{DFE} = 47°$
- FD = 10 *cm*

Calculer EF

Dans le triangle DEF, rectangle en D, on a :

$$\cos \widehat{\mathrm{DFE}} = \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{FE}}$$

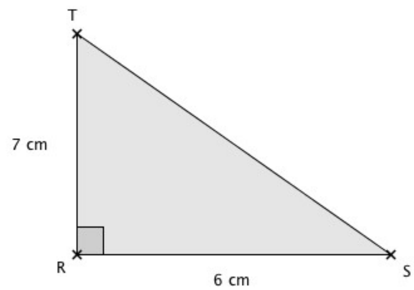
$$\frac{\cos 47°}{1} = \frac{10}{\mathrm{EF}}$$

$$\mathrm{EF} = \frac{10 \times 1}{\cos 47°} = \frac{10}{\cos 47°}$$

EF ≈ 14 ,66

EF est environ égale à 14,7 *cm* par arrondi au dixième.

3. Utiliser la trigonométrie dans un triangle rectangle pour calculer la mesure d'un angle.



Données :

- RST est un triangle rectangle en R.
- RS = 6 *cm* et RT = 7 *cm.*

Calculer la mesure de $\widehat{RST}$

Dans le triangle RST, rectangle en R, on a :

$\tan \widehat{\mathrm{RST}} = \frac{\mathrm{TR}}{\mathrm{RS}}$

$\tan \widehat{\mathrm{RST}} = \frac{7}{6}$

$\widehat{RST} \approx 49{,}3$

$\widehat{RST}$ mesure environ 49° par arrondi au degré près.

Chapitre 23 : Statistique 2. Quartiles

<u>Définition</u> :

Soit *S* une série statistique à une variable quantitative discrète ordonnée dans l'ordre croissant.

Le <u>premier quartile</u> Q_1 de S est le plus petit élément *a* de S tel qu'au moins 25% des valeurs de S soient inférieures ou égales à *a*.

Le <u>troisième quartile</u> Q_3 de S est le plus petit élément *a'* de S tel qu'au moins 75% des valeurs de S soient inférieures ou égales à *a'*.

Remarques :

- Un quartile est une valeur de la série.
- Le deuxième quartile Q_2 de *S* est le plus petit élément *a''* de *S* tel qu'au moins 50% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à *a''*.
- Q_2 ne coïncide toujours pas avec la médiane !

Chapitre 24 : Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues 2.

1. Résolution d'un système par substitution

Exercice

Une salle de théâtre compte 400 places. Les « parterres » sont à 23 € et les « balcons » sont à 18 €.

Quand le théâtre est plein, la recette est de 8100 €.

Combien y a-t-il de « parterres » et de « balcons » ?

On appelle respectivement p et b le nombre de « parterres » et le nombre de « balcons »

p et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} p+b=400 \\ 23p+18b=8100 \end{cases}$$

On exprime p en fonction de b dans la première équation :

$$p = 400 - b$$

On remplace p par $400 - b$ dans la seconde équation :

$$23(400 - b) + 18b = 8100$$

$$9200 - 23b + 18b = 8100$$

$$9200 - 5b = 8100$$

$$9200 - 8100 = 5b$$

$$b = \frac{1100}{5} = 220.$$

On en déduit que : $p = 400 - 220 = 180.$

Vérification :

- $180 + 220 = 400$
- $23 \times 180 + 18 \times 220 = 4140 + 3960 = 8100$

Conclusion : Il y a 180 « parterres » et 220 balcons.

2.Interprétation graphique d’un système de deux équations à deux inconnues

Exercice

On considère le système (S) suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x-2y=-4 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$$

1. On a :

$$(S')\ \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2 \\ y=-3-2x \end{cases}$$

On considère les fonctions *f* et *g* définies par :

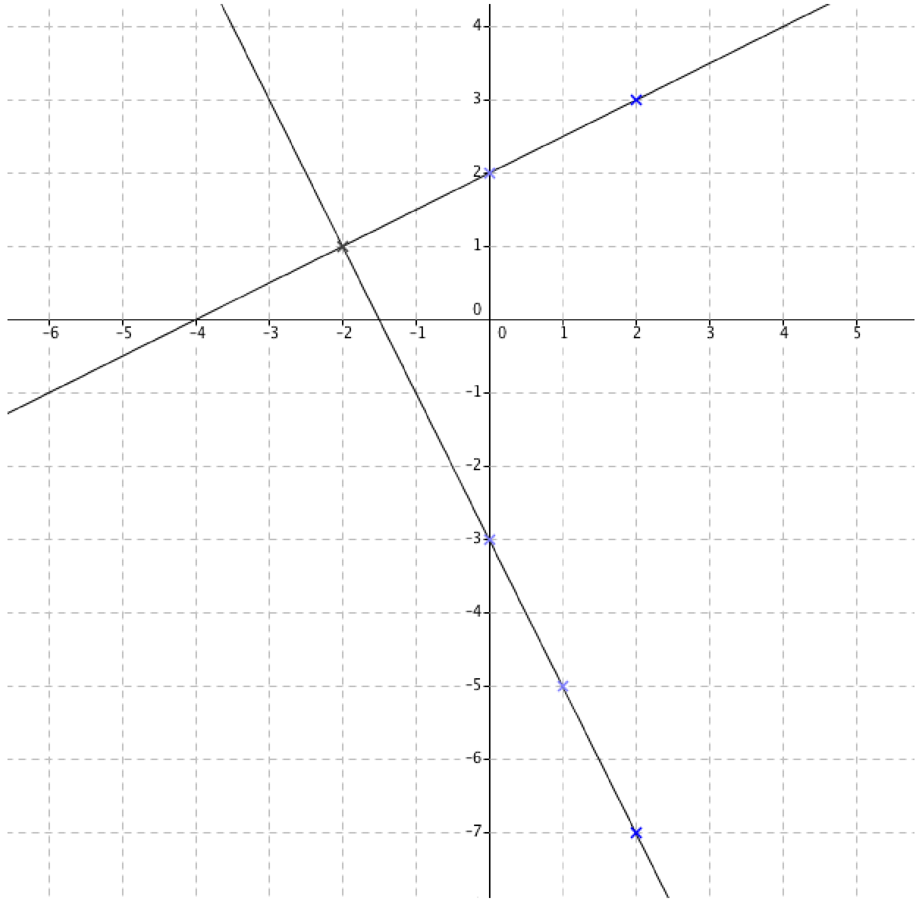
- $f : x \mapsto -2x - 3$
- $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$

2. On représente graphiquement les fonctions *f* et *g* :

- *f* est une fonction affine donc sa représentation graphique est la droite d'équation $y = -2x - 3$.
  L'ordonnée à l'origine est -3 et le coefficient directeur est -2.

- *g* est une fonction affine, donc sa représentation graphique est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$

  L'ordonnée à l'origine est 2 et le coefficient directeur est $\frac{1}{2}$.



3. Interprétation graphique

(a) Si un couple (x ; y) est solution de la première équation de (S'), alors le point M(x ; y) appartient à la droite représentant f et réciproquement.

(b) Si un couple (x ; y) est solution de la deuxième équation de (S'), alors le point M(x ; y) appartient à la droite représentant g et réciproquement.

Finalement si (x ; y) est solution de du système (S), alors M(x ; y) appartient à la droite représentant f et à celle représentant g .
M est donc le point d'intersection de ces deux droites.
Sur le graphique, on lit que les coordonnées du point d'intersection sont (-2 ; 1).

Conclusion : la solution du système est le couple (-2 ; 1).

4. Différents cas de figure peuvent se présenter :

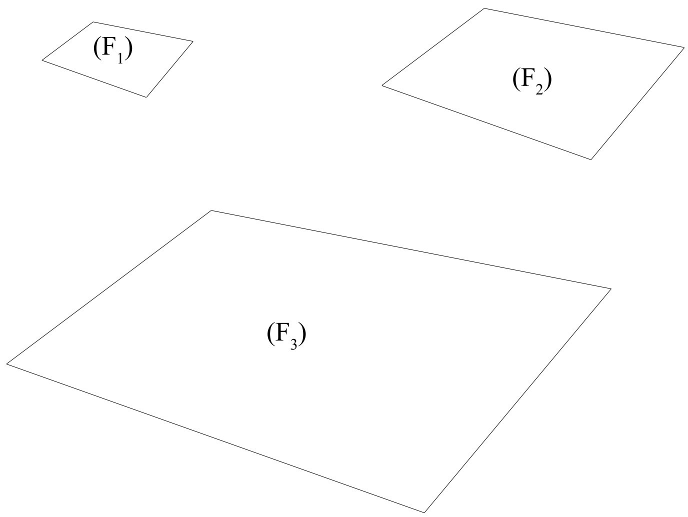
- Lorsque les deux représentations graphiques sont deux droites sécantes, alors le système a une unique solution : les coordonnées du point d'intersection.
- Lorsque les deux représentations graphiques sont deux droites strictement parallèles, alors le système n'a pas de solution.
- Lorsque les deux représentations graphiques sont deux droites parallèles et confondues, alors le système a une infinité de solution : les couples de cordonnées de tous les points des deux droites.

Remarque *:* En troisième, on ne rencontre que des systèmes qui ont une seule solution.

Chapitre 25 : Espace 3

1. Agrandissement-Réduction

1.1 Définition



- F_1 est une reproduction de F_2 à l'échelle $\frac{1}{2}$.

  On dit que F_1 est **une réduction de F_2 de coefficient $\frac{1}{2}$** .

- F_3 est une reproduction de F_2 à l'échelle 2 .

  F_3 est **un agrandissement de F_2 de coefficient 2**.

On admet la propriété suivante :

Propriété

Soit k un nombre strictement positif.

Si polygone *(P')* est un agrandissement/réduction de coefficient k d'un polygone *(P)* alors les deux polygones ont des angles égaux.

1.2 Effet sur les aires et les volumes

On admet les théorèmes suivants :

Théorèmes :

Soit k un nombre strictement positif.

Si une figure *(F')* (un solide *(S')*) est un agrandissement/réduction de coefficient k d'une figure *(F)* (un solide *(S)*) , alors l'aire de *(F')* (de *(S')*) s'obtient en multipliant l'aire de *(F)* (de *(S)*) par k^2.

Si un solide *(S')* est un agrandissement/réduction de coefficient k d'un solide *(S)*, alors le volume de *(S')* s'obtient en multipliant le volume de *(S)* par k^3.

Remarque :

On a démontré ce théorème dans le cas du rectangle pour les aires et dans le cas du pavé droit pour les volumes.

Chapitre 28 : Trigonométrie 2

1. Conjecture

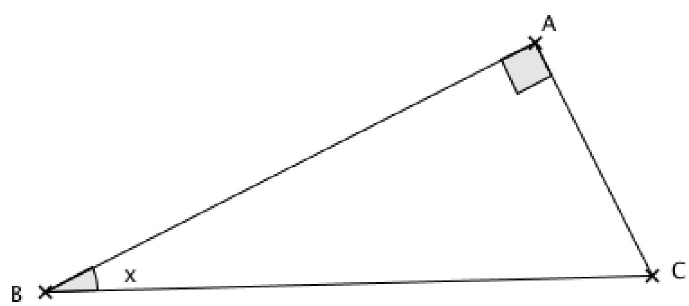
Il semble que pour tout angle aigu x, on ait :

- $\tan x = \dfrac{sinx}{cosx}$
- $(sinx)^2 + (cosx)^2 = 1$

2. Démonstration

Hypothèse : x est un angle aigu.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $\widehat{ABC} = x$.



Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a :

- $cosx = \dfrac{\text{AB}}{\text{BC}}$
- $sinx = \dfrac{\text{AC}}{\text{BC}}$
- $tanx = \dfrac{\text{AC}}{\text{AB}}$

On a :

- $$\frac{sinx}{cosx}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}=\frac{AC}{BC}\times\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}=tanx$$

- $$(sinx)^2+(cosx)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{AC^2}{BC^2}+\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}$$

  Le triangle ABC étant rectangle en A, on a d'après le théorème de Pythagore :

  $$BC^2=AB^2+AC^2$$

  D'où :

  $$(sinx)^2+(cosx)^2=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

3. Théorèmes

On vien de démontrer le théorème suivant :

Théorème

Pour tout angle aigu *x*, on a :

$\tan x=\frac{sinx}{cosx}$ **et *(sinx)²* + *(cosx)²* = *1***

Remarque : La deuxième relation s'écrit aussi:

Pour tout angle aigu x, $sin^2x + cos^2x = 1$

Exercice :

Soit x un angle aigu tel que $sinx = 0{,}28$.

Sans déterminer la mesure de x, calculer $cosx$ et $tanx$.